

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά (Άλγεβρα)
Γ΄ Λυκείου ΕΠΑΛ**

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

Διαφορικός λογισμός

Συναρτήσεις

2^ο Θέμα

24347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.
 β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ για κάθε x του πεδίου ορισμού A .
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

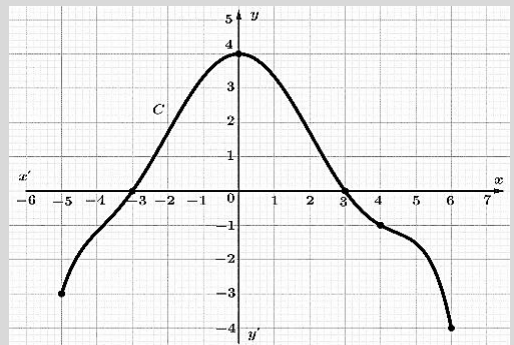
β) Για κάθε $x \neq 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

24355. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f .

Μελετώντας το σχήμα:

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Για τη συνάρτηση f , να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.
 γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.



Λύση

α) Οι προβολές των σημείων της γραφικής παράστασης της f στον άξονα x' δημιουργούν το διάστημα $[-5, 6]$, επομένως $A_f = [-5, 6]$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 6]$.

Έχει ολικό μέγιστο το 4 για $x = 0$ και ελάχιστο το 0 για $x = 6$.

γ) Όταν το $x \rightarrow -3$ τότε τα σημεία της C_f τείνουν στο σημείο $(-3, 0)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$.

Όταν το $x \rightarrow 4$ τότε τα σημεία της C_f τείνουν στο σημείο $(4, -1)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -1$.

24356. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Λύση

α) Η g ορίζεται όταν $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, οπότε $A_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

$$\beta) g(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

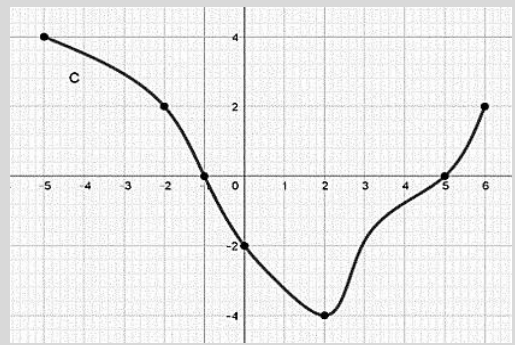
24358. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f .

Μελετώντας το σχήμα:

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Για τη συνάρτηση f , να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.



Λύση

α) Οι προβολές των σημείων της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $x'x$ δημιουργούν το διάστημα $[-5, 6]$, επομένως $A_f = [-5, 6]$.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-5, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 6]$.

Έχει μέγιστο το 4 για $x = -5$ και ελάχιστο το -4 για $x = 2$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι όταν $x \rightarrow -2$ τότε τα σημεία της C_f τείνουν στο σημείο $(-2, 2)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2.$$

Όταν $x \rightarrow 5$ τότε τα σημεία της C_f τείνουν στο σημείο $(5, 0)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$.

25874. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x+1$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\beta) \text{ Για κάθε } x \neq 1 \text{ είναι } f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

31085. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = x - 1$.
 γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = x - 1$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$.

31086. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$.
 γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x} = \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}} = x - 2$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2$.

32248. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g .
 β) Να δείξετε ότι για $x \neq 2$ είναι: $f(x) - g(x) = x + 1$.
 γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)]$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Η g ορίζεται όταν $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A_g = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) Για κάθε $x \neq 2$ είναι $f(x) - g(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x+1)(x-1) - (x+1)}{x-2} =$
 $\frac{(x+1)(x-1-1)}{x-2} = \frac{(x+1)(\cancel{x}-2)}{\cancel{x}-2} = x + 1$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$.

33624. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + 3f(2)$.
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) $\Pi = f(0) + 3f(2) = \frac{2 \cdot 0}{0-1} + 3 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 0 + 3 \cdot 4 = 12$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x-1} = 4$.

34591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$.
 γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{x^2 - x - 2x + 2}{x-1} = \frac{x(x-1) - 2(x-1)}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = x - 2$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = 1 - 2 = -1$.

Παράγωγοι

2^ο Θέμα

25326. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(4)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \geq 0$, άρα $A_f = [0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = (2x + \sqrt{x})' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

γ) $f'(4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

25875. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 4$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = 4x - 3$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (2x^2 - 1)' = 2 \cdot 2x - 0 = 4x$.

β) Το λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο A , επομένως $\lambda = f'(1) = 4$.

γ) Επειδή $\lambda = 4$, η (ε) έχει εξίσωση $y = 4x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το A , ισχύει ότι $1 = 4 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 1 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$, οπότε (ε): $y = 4x - 3$.

25876. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 0$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -1$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$.

β) Επειδή η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$, ισχύει ότι $f'(1) = \lambda \Leftrightarrow 2 - 2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$.

γ) $\varepsilon: y = 0 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = \beta$. Επειδή η ε διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$ είναι $\beta = -1$, άρα $\varepsilon: y = -1$.

26146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R}^*$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = (3 - x^{-1})' - (-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

γ) $f'(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

27843. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -6x^2 + 2x$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -8$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -8x - 9$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -2(x^3)' + (x^2)' - 4' = -2 \cdot 3x^2 + 2x - 0 = -6x^2 + 2x$.

β) Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda = f'(-1) = -8$

γ) Για $\lambda = -8$ είναι (ε): $y = -8x + \beta$.

Το σημείο A ανήκει στην (ε) οπότε $-1 = -8 + \beta \Leftrightarrow \beta = 9$, άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -8x - 9$.

31084. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $f'(-1) + f'(1) = 2$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - (2023)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 0 = x^2$.

β) $f'(-1) = (-1)^2 = 1$

γ) Είναι $f'(1) = 1^2 = 1$, οπότε $f'(-1) + f'(1) = 1 + 1 = 2$.

31088. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \frac{1}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-3)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = (-3x^{-1})' = -3 \cdot (-1)x^{-2} = \frac{3}{x^2}$.

γ) $f'(-3) = \frac{3}{(-3)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

31089. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = (4x^{-1} - 1)' = 4 \cdot (-1)x^{-2} - 0 = -\frac{4}{x^2}$.

γ) $f'(-2) = -\frac{4}{(-2)^2} = -\frac{4}{4} = -1$.

31090. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2) + f(2)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = (2x^{-1} - 1)' = 2 \cdot (-1)x^{-2} - 0 = -\frac{2}{x^2}$.

γ) $f'(-2) + f(2) = -\frac{2}{(-2)^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{2}{4} + 1 - 1 = -\frac{1}{2}$.

31091. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(9)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \geq 0$, άρα $A_f = [0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = (\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

γ) $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$.

31693. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(-1, \frac{2}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 1$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = x + \frac{5}{3}$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

β) Είναι $\lambda = f'(-1) = (-1)^2 = 1$.

γ) Επειδή $\lambda = 1$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το A , ισχύει ότι

$\frac{2}{3} = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, οπότε η (ε) έχει εξίσωση $y = x + \frac{5}{3}$.

31695. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 5)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -5$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -5x + 10$.

Λύση

α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = 5(x^{-1})' = -5x^{-2} = -\frac{5}{x^2}$.

β) Είναι $\lambda = f'(1) = -5$.

γ) Επειδή $\lambda = -5$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -5x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το A , ισχύει ότι $5 = -5 + \beta \Leftrightarrow \beta = 10$, οπότε η (ε) έχει εξίσωση $y = -x + 10$.

33622. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να βρείτε την $f''(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0)$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2x - 3$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = 2$.

γ) Είναι $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0) = 4 - 3 + 2 = 3$.

33625. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 7x$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2, -6)$, τότε:

α) να δείξετε ότι $f'(x) = 4x - 7$.

β) να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

γ) να δείξετε ότι $\beta = -8$.

Λύση

α) $f'(x) = (2x^2 - 7x)' = 2(x^2)' - 7(x)' = 2 \cdot 2x + 7 \cdot 1 = 4x + 7$.

β) Είναι $\lambda = f'(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 1$.

γ) Η ε έχει εξίσωση $y = x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο $(2, -6)$, άρα $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -6 - 2 = -8$.

34592. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + 2$. Να βρείτε:

- α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Την παράγωγο f' της συνάρτησης.
 γ) Την τιμή $f'(2)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' + (2)' = -\frac{1}{x^2} + 0 = -\frac{1}{x^2}$

γ) $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

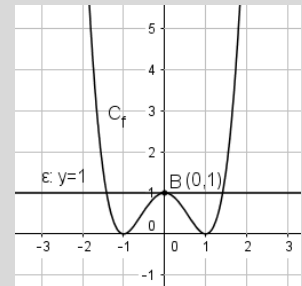
34736. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε, με βάση το παραπάνω σχήμα, τη μονοτονία της συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

β) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(0, 1)$, τότε:

i) Να βρείτε την $f(0)$ και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(0) = 0$.



Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

β) i. Επειδή το $B(0, 1)$ είναι σημείο της C_f ισχύει ότι $f(0) = 1$. Επειδή η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, η γωνία που σχηματίζει με αυτόν είναι 0° .

ii. Είναι $f'(0) = \varepsilon\phi 0 = 0$.

34845. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 0)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -3$.

γ) η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -3x + 3$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (1 - x^3)' = (1)' - (x^3)' = 0 - 3x^2 = -3x^2$.

β) Είναι $\lambda = f'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$.

γ) Επειδή $\lambda = -3$, η (ε) έχει εξίσωση της μορφής $y = -3x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$, ισχύει ότι: $0 = -3 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$, οπότε (ε): $y = -3x + 3$.

4^ο Θέμα

28286. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Ο Γιάννης υπολόγισε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και βρήκε ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135 μοιρών και επίσης ότι δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Συμφωνείτε με τον Γιάννη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - x - 2x + 2)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[x(x - 1) - 2(x - 1)]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = -1 \end{aligned}$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι $\lambda = f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$.

γ) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

γνωρίζουμε ότι $\lambda = \epsilon\phi\omega$, άρα $\epsilon\phi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής $\epsilon: y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = -x + \beta$.

Είναι $f(1) = 1 - 3 + 2 + 1 = 1$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι το $(1, 1)$ και επειδή η ϵ διέρχεται από αυτό, είναι $1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$, οπότε $\epsilon: y = -x + 2$.

Η ϵ διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων όταν $0 = 0 + 2$ που είναι αδύνατο.

Άρα δεν συμφωνούμε με τον Γιάννη.

28617. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 - 2x$, $x \in [0, +\infty)$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$.

γ) Για $\alpha = 1$

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f}{g}(x)$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Λύση

α) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f'(x) = (ax^2 - 2x)' = (ax^2)' - (2x)' = a \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 2ax - 2$.

Είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

β) i. Η g ορίζεται όταν $x \geq 0$, άρα $A_g = [0, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$.

γ) i. Η h ορίζεται όταν $x \geq 0$ και $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A_h = [0, 2) \cup (2, +\infty)$.

$$\text{Είναι } h(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{x(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{x \cancel{(x-2)} (\sqrt{x} + \sqrt{2})}{\cancel{x-2}} = x(\sqrt{x} + \sqrt{2}).$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x(\sqrt{x} + \sqrt{2}) = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

34510. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3, 4)$.

ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο $B(1, 10)$.

γ) Αν η εφαπτομένη (η) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\Gamma(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y = f'(x_0)x$, να βρείτε το x_0 .

Λύση

α) Για κάθε $x \neq 2$ είναι $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}.$$

β) i. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο A έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(3) = -\frac{3}{(3-2)^2} = -3$, οπότε η (ε)

έχει εξίσωση της μορφής $y = -3x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Επειδή η (ε) διέρχεται από το A , ισχύει ότι:

$$4 = -3 \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4 + 9 = 13, \text{ οπότε } (\varepsilon): y = -3x + 13.$$

ii. Η (ε) διέρχεται από το σημείο $B(1, 10)$ όταν $10 = -3 \cdot 1 + 13 \Leftrightarrow 10 = -3 + 13$ ισχύει.

γ) Είναι $f'(x_0) = -\frac{3}{(x_0-2)^2}$, $x_0 \neq 2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Γ έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda_1 x + \beta_1$ με $\lambda_1 = f'(x_0)$, οπότε (η):

$$y = f'(x_0)x + \beta$$

Επειδή η (η) διέρχεται από το Γ , ισχύει ότι: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Όμως η (η) είναι της μορφής $y = f'(x_0)x$, άρα $\beta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x_0+1}{x_0-2} - x_0 \cdot \left[-\frac{3}{(x_0-2)^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0+1}{x_0-2} + \frac{3x_0}{(x_0-2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x_0-2)(x_0+1) + 3x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + x_0 - 2x_0 - 2 + 3x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 12$ και ρίζες $x_0 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

34529. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ και

$$g(x) = x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(2, g(2))$.

γ) i) Να δείξετε ότι το σημείο $(2, g(2))$ ανήκει και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο $(2, 1)$, είναι κάθετες μεταξύ τους. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(δίνεται ότι: δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι κάθετες μεταξύ τους εάν ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$)

Λύση

α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = (2x^{-1})' = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ και $f'(2) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$

Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = g'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2$, οπότε είναι της μορφής $y = 2x + \beta$.

$$\text{Είναι } g(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1.$$

$$\text{Επειδή η } \varepsilon \text{ διέρχεται από το σημείο } (2, 1), \text{ ισχύει ότι } 1 = 2 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1 - 4 = -3.$$

γ) i. Το σημείο $(2, g(2))$, είναι το $(2, 1)$ και ανήκει στη γραφική παράσταση της f , όταν

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2} = 1 \text{ ισχύει.}$$

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $(2, 1)$ είναι $\lambda_1 = f'(2) = -\frac{1}{2}$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g στο $(2, 1)$ είναι $\lambda_2 = g'(2) = 2$.

Επειδή $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, οι δύο εφαπτομένες είναι κάθετες μεταξύ τους.

34734. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.

Στη συνέχεια δίνεται ότι $\alpha = 4$.

β) i) Να υπολογίσετε τον $f'(1)$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,4)$.

γ) i) Να βρείτε τα σημεία τομής K , Λ της (ϵ) με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ϵ) με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

Λύση

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ όταν $f(1) = 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

β) i. Είναι $f(x) = \frac{4}{x}$, $x > 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = (4x^{-1})' = 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$.

Οπότε $f'(1) = -4$.

ii. Η εφαπτομένη (ϵ) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = -4$ και εξίσωση της μορφής $y = -4x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο A , ισχύει ότι $4 = -4 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4 + 4 = 8$, οπότε (ϵ): $y = -4x + 8$.

γ) i. Για $y = 0$ είναι $-4x + 8 = 0 \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2$, άρα $K(2,0)$.

Για $x = 0$ είναι $y = -4 \cdot 0 + 8 = 8$, άρα $\Lambda(0,8)$.

ii. Είναι $(OK\Lambda) = \frac{1}{2}(OK) \cdot (O\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$.

Εφαρμογές των παραγώγων**2^ο Θέμα**

24357. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την $f'(5)$.

γ) Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)' = -(x^2)' + 2(x)' + (4)' = -2x + 2 \cdot 1 + 0 = -2x + 2$.

β) $f'(5) = -2 \cdot 5 + 2 = -10 + 2 = -8$.

γ) Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

25459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (3x^2 - 6x + 2023)' = 3(x^2)' - 6(x)' + (2023)' \Leftrightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6.$$

β) $f'(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$.

γ) Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

4^ο Θέμα

24359. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Για $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M((2, f(2)))$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Λύση

α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M((2, f(2)))$ είναι το $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$

$$\beta) f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Για κάθε $x < \frac{1}{3}$ ή $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ είναι

$f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα

στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

x	0	1/3	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

γ) Οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $f'(x) = 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{3}.$$

Είναι $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$ και $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$, άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(1, 0)$ και $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$.

24360. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2).

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}$ με $x > 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

Λύση

α) Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι xy , οπότε $xy = 400 \Leftrightarrow y = \frac{400}{x}$, $x, y > 0$.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{400}{x} = 2x + \frac{800}{x}$, $x > 0$.

β) Η Π είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\Pi'(x) = \left(2x + \frac{800}{x}\right)' = 2 - \frac{800}{x^2} = \frac{2x^2 - 800}{x^2}$.

Είναι $\Pi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 800}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 800 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 800 \Leftrightarrow x^2 \geq 400 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 20$.

Για κάθε $x \in (0, 20)$ είναι $\Pi'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (20, +\infty)$ είναι $\Pi'(x) > 0$, επειδή η Π είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 20]$ και γνησίως αύξουσα στο $[20, +\infty)$.

γ) Η περίμετρος Π γίνεται ελάχιστη για $x = 20$ m με ελάχιστη περίμετρο το

$$\Pi(20) = 40 + \frac{800}{20} = 40 + 40 = 80 \text{ m}.$$

24361. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = -1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x^3 + \lambda x^2 - x)' = 3x^2 + 2\lambda x - 1$.

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

β) Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε

$x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως

αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$. Η f έχει

τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$ και τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{11}{27}$.

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη στο M είναι παράλληλη στην ευθεία

$y = -x$ αν και μόνο αν $f'(x_0) = \lambda_e \Leftrightarrow 3x_0^2 + 2x_0 - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(3x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$x_0 = 0$ ή $x_0 = -\frac{2}{3}$. Είναι $f(0) = 0$ και $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{27}$, οπότε τα ζητούμενα

σημεία είναι τα $(0, 0)$ και $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{27}\right)$.

24363. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο

$M(2, f(2))$, είναι η ευθεία $(\epsilon): y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\beta) f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-	o	+	o	-
f		↘	↗	↘	

Για κάθε $x < -1$ ή $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{2}$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(2) = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5} \text{ και } f'(2) = \frac{1-4}{(4+1)^2} = -\frac{3}{25}.$$

$$\text{Είναι } \varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{2}{5} = -\frac{3}{25}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$$

25458. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}, x \in \mathbb{R}.$$

$\beta)$ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

$\gamma)$ Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\delta)$ Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

Λύση

$$\alpha) \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \cdot (x^2 + 2x + 5)' = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}} =$$

$$\frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

$$\beta) f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		↘	↗

Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > -1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

$\gamma)$ Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, έχει ελάχιστο το $f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 2(-1) + 5} = \sqrt{1 - 2 + 5} = \sqrt{4} = 2$, οπότε $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\delta)$ Η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον $x'x$ όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν, άρα $\lambda = 0$. Όμως $\lambda = f'(x_0)$, οπότε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Είναι $f(-1) = 2$.

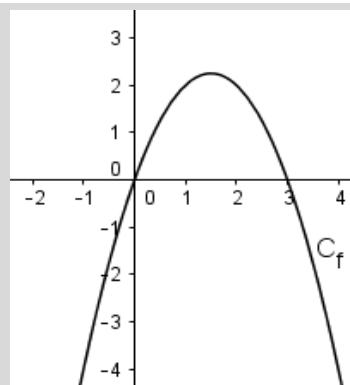
Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία $y = 0 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$, είναι $\beta = 2$, οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y = 2$.

25461. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολώνυμο δευτέρου βαθμού.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .



Λύση

α) Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε

$x \in (0, 3)$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

β) Είναι $1 < 2 \Leftrightarrow f(1) < f(2)$.

γ) Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = -1$ και τοπικό μέγιστο το $f(3) = 2$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f		↘	↗	↘	

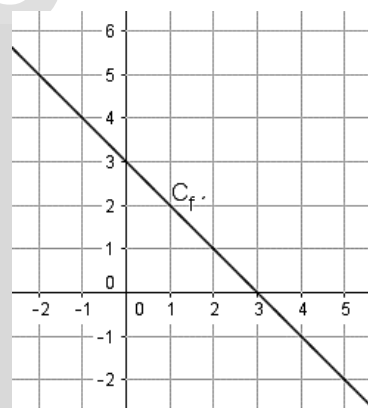
25643. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f .

Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3, 0)$, τότε:

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$.

γ) Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.



Λύση

α) Για κάθε $x < 3$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x > 3$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

β) Είναι $3 < 4 \Leftrightarrow f(3) > f(4)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ έχει μέγιστο το $f(3) = 2$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

26895. Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

α) i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 20x$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

Λύση

α) i. Είναι $2x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - 2x$. Τότε $f(x) = xy = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$.

ii. Επειδή οι αριθμοί x, y είναι θετικοί, ισχύει ότι $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 20 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -20 \Leftrightarrow x < 10$, άρα $D_f = (0, 10)$.

β) Για κάθε $x \in (0, 10)$ είναι $f'(x) = 20 - 4x$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 20 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -20 \Leftrightarrow x \leq 5.$$

Για κάθε $x \in (0, 5)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (5, 10)$ είναι

$f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $x=5$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 5]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5, 10)$.

x	0	5	10
f'	+	0	-
f		↗	↘

γ) Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$.

28125. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 8x + 18$ και $g(x) = -(x-4)^4 + 2$.

α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x), x \in \frac{1}{2}\mathbb{R}$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2x - 8$ και $g'(x) = -4(x-4)^3(x-4)' = -4(x-4)^3$.

β) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Για κάθε $x < 4$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 4$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(4) = 16 - 32 + 18 = 2$.

Για κάθε $x < 4$ είναι $g'(x) > 0$ και για κάθε $x > 4$ είναι $g'(x) < 0$, επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[4, +\infty)$. Η g έχει μέγιστο το $g(4) = 2$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο στο 4 το 2 και η g έχει μέγιστο στο 4 το 2, ισχύει ότι $f(x) \geq 2$ και $g(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει μόνο για $x=4$. Επομένως $f(x) \geq 2 \geq g(x), x \in \mathbb{R}$.

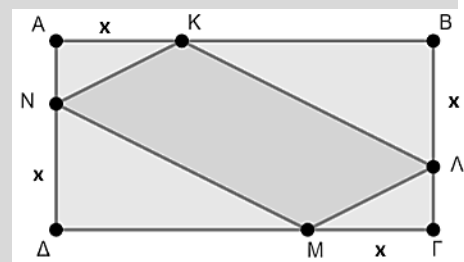
28280. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AB = 4$ και $ΒΓ = 2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = BL = ΓΜ = ΔΝ = x$.

α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του x είναι

$$E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x) \cdot x, \quad x \in (0, 2) \text{ και το εμβαδόν του ΚΒΛ}$$

$$\text{ως συνάρτηση του } x \text{ είναι } E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0, 2).$$



ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 3x + 4)$, $x \in (0, 2)$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Λύση

α) i. Είναι $AN = 2 - x$, άρα $E_1(x) = (AKN) = \frac{1}{2}(AK)(AN) = \frac{1}{2}x(2 - x)$, $x \in (0, 2)$.

Είναι $BK = 4 - x$, και $E_2(x) = (KBL) = \frac{1}{2}(BK)(BL) = \frac{1}{2}(4 - x)x$.

ii. $(AB\Gamma\Delta) - 2(AKN) - 2(KBL) \Leftrightarrow (ΚΛΜΝ) = 8 - 2 \cdot \frac{1}{2}(2 - x) \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2}(4 - x) \cdot x \Leftrightarrow$
 $E(x) = 2(x^2 - 3x + 4)$, $x \in (0, 2)$.

β) Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $E'(x) = 2(2x - 3)$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$ είναι $E'(x) = 2\left(2 \cdot \frac{3}{2} - 3\right) = 0$.

γ) Είναι $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

x	0	$\frac{3}{2}$	2
E'	-	0	+
E		↙	↗

Για κάθε $x < \frac{3}{2}$ είναι $E'(x) < 0$ και για κάθε $x > \frac{3}{2}$ είναι $E'(x) > 0$,

επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$.

Η E παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{3}{2}$.

28282. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB = 4$.

Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε

$AK = BL = \Gamma M = \Delta N = x$.

α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

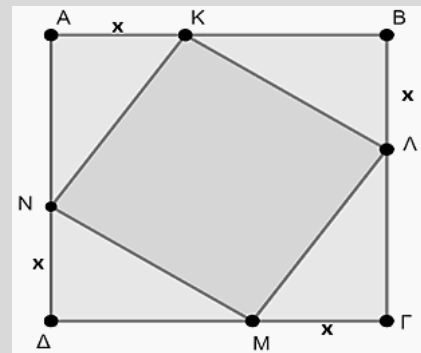
$$E_1(x) = \frac{1}{2}(4 - x) \cdot x, \quad x \in (0, 4).$$

ii. το εμβαδόν του $ΚΛΜΝ$ ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0, 4).$$

β) Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού $E(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.



Λύση

α) i. Είναι $AN = \Delta\Delta - \Delta\Lambda = 4 - x$.

Είναι $x > 0$ και $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ άρα $x \in (0, 4)$. $E_1(x) = \frac{1}{2}(AN)(AK) = \frac{1}{2}(4 - x) \cdot x$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα AKN , $\Delta\Lambda M$, $M\Gamma\Lambda$, $\Lambda B K$ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες οπότε είναι ίσα και επομένως έχουν ίσα εμβαδά.

Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $E(x) = (AB\Gamma\Delta) - 4(\Delta\text{KN}) = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(4-x) \cdot x = 16 - 2x(4-x) \Leftrightarrow$
 $E(x) = 16 - 8x + 2x^2 = 2(x^2 - 4x + 8).$

β) Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $E'(x) = 2(x^2 - 4x + 8)' = 2(2x - 4) = 4x - 8.$

γ) $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 8 \Leftrightarrow 2 \leq x < 4.$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $E'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (2, 4)$ είναι $E'(x) > 0$, επειδή η E είναι συνεχής στο $x = 2$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 4)$.

Η E παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 2$.

x	0	5	4
E'	+	0	-
E		↗	↘

28618. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1.$

β) Είναι $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

γ) Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = 0$ και εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = \beta.$

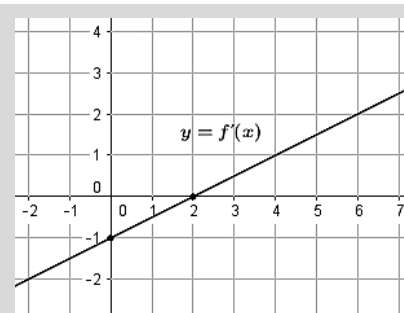
Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ είναι $1 = \beta$, οπότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = 1$.

30975. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2) = 5$ και $f(0) = 6$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x < 2$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα αυτό. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 2$ το $f(2) = 5$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f'(0) = -1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(0) = -1$ και εξίσωση της μορφής $y = -x + \beta$.

Επειδή η εφαπτομένη είναι στο σημείο $(0, 6)$, ισχύει ότι $6 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$, οπότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -x + 6$.

32260. Δίνεται το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .

α) Αν το μήκος της πλευράς $AB = x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά $B\Gamma$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$

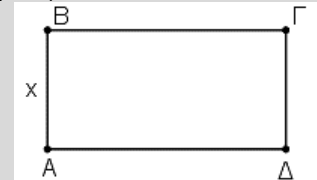
συναρτήσει του x είναι $B\Gamma = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από

τη συνάρτηση: $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, $x > 0$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Έστω $A\Delta = y \text{ m}$. Επειδή το ορθογώνιο έχει εμβαδό 4 m^2 , είναι $xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$.

Άρα $B\Gamma = A\Delta = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

β) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $f(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{4}{x} = 2x + \frac{8}{x}$, $x > 0$.

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (2, +\infty)$

είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα

στο $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(2) = 8$.

x	0	2	$+\infty$
f'	-	0	+
f		↘	↗

δ) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι η συνάρτηση $f(x)$ και έχει μέγιστο για $x = 2 \text{ m}$, τότε $y = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$.

Επειδή $x = y$ το ορθογώνιο είναι τετράγωνο, οπότε συμφωνούμε με την άποψη του μαθητή.

32365. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^3 + 3x + 6)' = 3x^2 + 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 3$.

β) $f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 3 = 3$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

32366. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 6x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10}$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (2x^3 - x^2 + x - 1)' = 6x^2 - 2x + 1$.

Το τριώνυμο $6x^2 - 2x + 1$ έχει $\Delta = -20 < 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $6x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = (6x^2 - 2x + 1)' = 12x - 2$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = g'(1) = 12 \cdot 1 - 2 = 10$.

Η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = 10x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(1) = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 5$. Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $(1, 5)$, οπότε:

$$5 = 10 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5 - 10 = -5$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ έχει εξίσωση $y = 10x - 5$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x + 1 - 5}{12x - 2 - 10} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)}{12(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 4}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

32367. Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι: $C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30$, $x \geq 0$.

α) Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας;

β) Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει;

γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$.

δ) Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος;

Λύση

α) Για την παραγωγή x κιλών λεβάντας 2 κιλών λεβάντας το ημερήσιο κόστος είναι $C(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 30 = 16 - 16 - 16 + 30 = 14$, δηλαδή $14 \cdot 100 = 1400$ ευρώ.

β) $C(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 30 = 30$, δηλαδή το ημερήσιο κόστος χωρίς να παράγει τίποτα είναι 3000 ευρώ.

γ) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $C'(x) = (2x^3 - 4x^2 - 8x + 30)' = 6x^2 - 8x - 8$.

δ) Το τριώνυμο $6x^2 - 8x - 8$ έχει $\Delta = 256$ και ρίζες $x = 2$ ή $x = -\frac{3}{4}$ απορρίπτεται.

Για κάθε $x > 2$ είναι $C'(x) > 0$, ενώ για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $C'(x) < 0$, επειδή η C είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Η C έχει ελάχιστο για $x = 2$ κιλά λεβάντας και το ελάχιστο ημερήσιο κόστος είναι $C(2) = 14$, δηλαδή $14 \cdot 100 = 1400$ ευρώ.

33662. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

Λύση

α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 2)' = 4x^3 - 4x$.

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$.

Άρα $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0, 1)$.

β) Από το α) ερώτημα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1$.

γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 οπότε $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$.

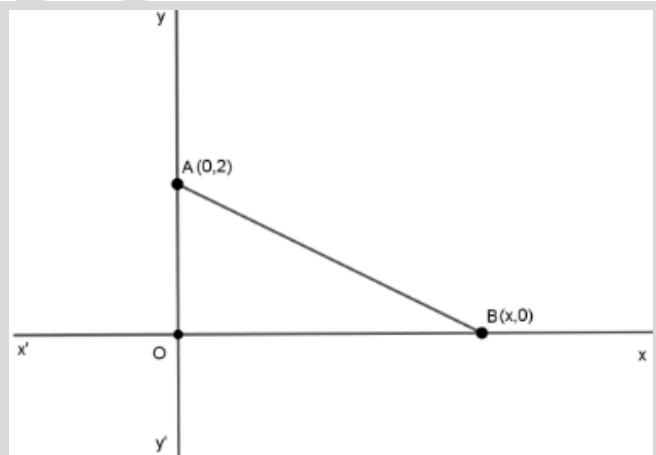
33628. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(x, 0)$ με $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του x είναι:

$$d(x) = (AB) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ με } x > 0.$$

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x = 3$.

γ) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι, καθώς το σημείο B κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα Ox , το μήκος του AB αυξάνεται. Να αιτιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, αξιοποιώντας το ερώτημα (β).



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$(AB)^2 = (OB)^2 + (OA)^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $d'(x) = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x = 3$ είναι

$$d'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $d'(x) > 0$, άρα η d είναι γνησίως αύξουσα. Άρα καθώς το B κινείται δεξιά, δηλαδή το x μεγαλώνει, η απόσταση d αυξάνεται.

33629. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

γ) i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2301)$ της συνάρτησης f .

Λύση

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2+1} = \frac{2}{3}.$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

γ) i. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\text{ii. Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f(0) = \frac{0^2}{0^2+1} = 0.$$

δ) Είναι $2023 < 2301$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα $f(2023) < f(2301)$.

33632. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 2)' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Για κάθε } x \in (0, 1) \text{ είναι } f'(x) < 0 \text{ και για κάθε } x > 1 \text{ είναι } f'(x) > 0.$$

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Έχει ελάχιστο το $f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο το 1, για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $f(x) \geq 1$, οπότε $f(x) > 0$.

33859. Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

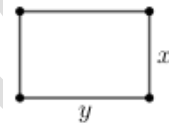
γ) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει;

Λύση

α) Επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο 200m, είναι $2x + 2y = 200 \Leftrightarrow x + y = 100 \Leftrightarrow y = 100 - x$.

Είναι $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 100 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -100 \Leftrightarrow x < 100$, άρα $x \in (0, 100)$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E(x) = x \cdot y = x(100 - x) = 100x - x^2$.



β) Για κάθε $x \in (0, 100)$ είναι $E'(x) = (100x - x^2)' = 100 - 2x$.

Για κάθε $x \in (0, 100)$ είναι

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 100 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -100 \Leftrightarrow 0 < x \leq 50.$$

Για κάθε $x \in (0, 50)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (50, 100)$ είναι $E'(x) < 0$,

επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 50]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[50, 100)$.

x	0	50	100
E'	+	0	-
E		↗ ↘	

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου, βάση της μονοτονίας της E , γίνεται μέγιστο για $x = 50$ m.

Το μέγιστο εμβαδό είναι το $E(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500 \text{ m}^2$.

33860. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = 3$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$ και $f\left(\frac{13}{4}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5)' = 3x^2 - 6x + \lambda$.

$$\text{Είναι } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 3 - 6 + \lambda = 0 \Leftrightarrow -3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

β) Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$.

Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \frac{7}{3} - \frac{13}{4} = \frac{28}{12} - \frac{39}{12} = -\frac{11}{12}.$$

$$\text{Είναι } \frac{7}{3} - \frac{13}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{3} < \frac{13}{4} \Leftrightarrow f\left(\frac{7}{3}\right) < f\left(\frac{13}{4}\right).$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{3(1-1)}{1} = 0.$$

34259. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α) i) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

ii) Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Για $\alpha = 1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 1}$.

Λύση

α) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (\alpha x^2 - 2x)' = 2\alpha x - 2$.

ii. Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ όταν $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β) Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = x^2 - 2x$ και $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$,

επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f			

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 2 \cdot (1+1) = 4.$$

34801. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + c$, $0 \leq t \leq 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c .

Για $c = 8$

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t = 2$.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής.

Λύση

α) Επειδή η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, ισχύει ότι $\theta(0) = 8 \Leftrightarrow 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c = 8 \Leftrightarrow c = 8$.

β) Για $c = 8$ είναι $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + 8$.

Για κάθε $t \in (0, 4)$ είναι $\theta'(t) = 3t^2 - 6t + 2$.

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t = 2$ είναι

$$\theta'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 12 - 12 + 2 = 2^{\circ}\text{C} / \text{h}.$$

γ) Για κάθε $t \in (0, 4)$ είναι $\theta''(t) = (3t^2 - 6t + 2)' = 6t - 6 = 6(t - 1)$.

Για κάθε $t \in (0, 1)$ είναι $\theta''(t) < 0$ και για κάθε $t \in (1, 4)$ είναι $\theta''(t) > 0$,
επειδή η θ' είναι συνεχής στο $(0, 4)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και
γνησίως αύξουσα στο $[1, 4)$.

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος για $t = 1$.

Η ελάχιστη τιμή του είναι $\theta'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 3 - 6 + 2 = -1^\circ \text{C/h}$.

t	0	1	4
θ''	-	0	+
θ'	↘		↗

34802. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + c$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το c αν ισχύει $f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0$.

Για $c = 2$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2023)$, $f(2024)$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^2 - 4x + c)' = 2x - 4$ και $f''(x) = (2x - 4)' = 2$.

Είναι $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 4 - 8 + c = c - 4$, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$ και $f''(2023) = 2$, οπότε:

$$f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0 \Leftrightarrow c - 4 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow c - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

β) Για $c = 2$ είναι $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $f'(x) = 2(x - 2)$.

Για κάθε $x < 2$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f
είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

γ) Είναι $2023 < 2024$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, άρα $f(2023) < f(2024)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

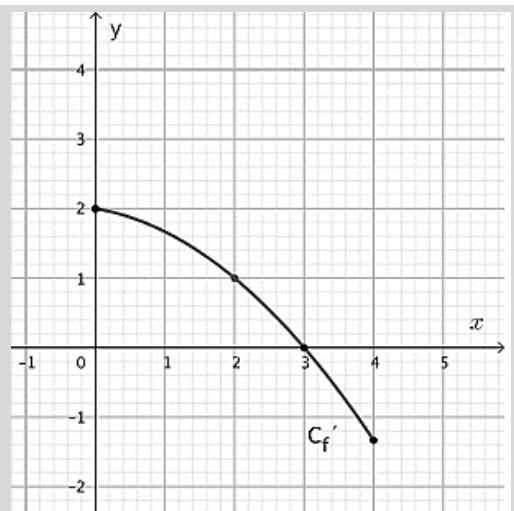
34824. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 4]$. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη 3.

Μελετώντας το σχήμα να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$;

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 3]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$.



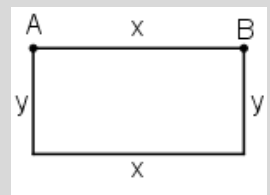
Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$, είναι $f'(2) = 1$, άρα ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$ είναι 1.

β) Για κάθε $x \in [0, 3)$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.

γ) Για κάθε $x \in (3, 5]$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, 5]$.
Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$.

34828. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η πλευρά AB της περιοχής, μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά μ και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά μ , τότε:



α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συνάρτησι του x , είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, \quad x > 0.$$

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο.

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περίφραξης;

Λύση

α) Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 800 m^2 , ισχύει ότι $x \cdot y = 800 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}$.

Το μήκος της περίφραξης είναι $x + 2y = x + 2 \cdot \frac{800}{x} = x + \frac{1600}{x}$.

Το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι $6x$ ευρώ και για τον συρμάτινο φράχτη είναι

$$2\left(x + \frac{1600}{x}\right) = 2x + \frac{3200}{x} \text{ ευρώ, οπότε το συνολικό κόστος είναι}$$

$$K(x) = 6x + 2x + \frac{3200}{x} = 8x + \frac{3200}{x}, \quad x > 0.$$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $K'(x) = \left(8x + \frac{3200}{x}\right)' = 8 - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^2 - 3200}{x^2}$.

$$K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2 - 3200}{x^2} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 8x^2 - 3200 \geq 0 \Leftrightarrow 8x^2 \geq 3200 \Leftrightarrow x^2 \geq 400 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 20.$$

Για κάθε $x \in (0, 20)$ είναι $K'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (20, +\infty)$ είναι $K'(x) > 0$, επειδή η K είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 20]$ και γνησίως αύξουσα στο $[20, +\infty)$. Το κόστος περίφραξης γίνεται

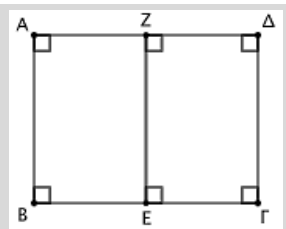
$$\text{ελάχιστο για } x = 20\text{m, τότε } y = \frac{800}{20} = 40\text{m}.$$

γ) Το ελάχιστο κόστος είναι $K(20) = 8 \cdot 20 + \frac{3200}{20} = 160 + 160 = 320$ ευρώ.

34832. Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με ενδιάμεσο χώρισμα EZ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν $A\Delta = x$ και $AB = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του

$$\text{σχήματος, συνάρτησι του } x, \text{ είναι: } E(x) = \frac{200x - 2x^2}{3}, \quad 0 < x < 100.$$



β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του σχήματος.

Λύση

α) Επειδή το συρματοπλέγμα έχει μήκος 200m, είναι

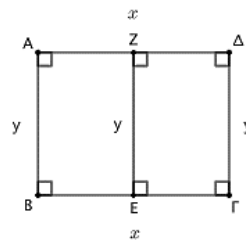
$$ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ + ΒΑ + ΕΖ = 200 \Leftrightarrow$$

$$x + y + x + y + y = 200 \Leftrightarrow 2x + 3y = 200 \Leftrightarrow 3y = 200 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{200 - 2x}{3}.$$

$$\text{Είναι } x > 0 \text{ και } y > 0 \Leftrightarrow \frac{200 - 2x}{3} > 0 \Leftrightarrow 200 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -200 \Leftrightarrow x < 100,$$

άρα $0 < x < 100$.

$$\text{Το εμβαδόν του σχήματος είναι } E(x) = (ΑΒ) \cdot (ΒΓ) = y \cdot x = \frac{200 - 2x}{3} \cdot x = \frac{200x - 2x^2}{3}.$$



β) Για κάθε $0 < x < 100$ είναι $E'(x) = \left(\frac{200x - 2x^2}{3} \right)' = \frac{(200x - 2x^2)'}{3} = \frac{200 - 4x}{3}.$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{200 - 4x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 200 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -200 \Leftrightarrow x \leq 50.$$

Για κάθε $x \in (0, 50)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (50, 100)$ είναι $E'(x) < 0$,

επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 50]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[50, 100)$.

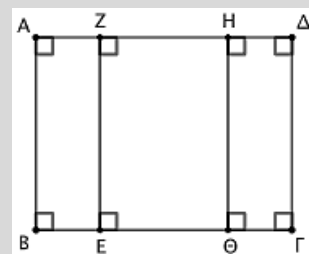
x	0	50	100
E'	+	0	-
E		↗	↘

$$\text{Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για } x = 50\text{m και } y = \frac{200 - 2 \cdot 50}{3} = \frac{100}{3} \text{ m}.$$

γ) Το μέγιστο εμβαδό είναι $E(50) = \frac{200 \cdot 50 - 2 \cdot 50^2}{3} = \frac{2500}{3} \text{ m}^2.$

34835. Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και να θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου ΑΒΓΔ με δύο ενδιάμεσα χωρίσματα ΕΖ και ΘΗ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν $ΑΔ = x$ και $ΑΒ = y$ να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x, είναι: $E(x) = \frac{100x - x^2}{2}, 0 < x < 100.$



β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ώστε το συνολικό εμβαδόν του να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος.

Λύση

α) Επειδή το συρματοπλέγμα έχει μήκος 200m, είναι

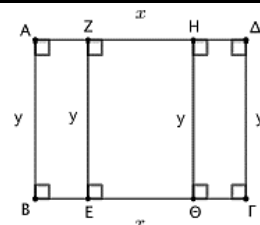
$$ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ + ΒΑ + ΕΖ + ΗΘ = 200 \Leftrightarrow$$

$$x + y + x + y + y + y = 200 \Leftrightarrow 2x + 4y = 200 \Leftrightarrow$$

$$4y = 2(100 - x) \Leftrightarrow y = \frac{2(100 - x)}{4} = \frac{100 - x}{2}.$$

$$\text{Είναι } x > 0 \text{ και } y > 0 \Leftrightarrow \frac{100 - x}{2} > 0 \Leftrightarrow 100 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -100 \Leftrightarrow x < 100, \text{ άρα } 0 < x < 100.$$

$$\text{Το εμβαδόν του σχήματος είναι } E(x) = (ΑΒ) \cdot (ΒΓ) = y \cdot x = \frac{100 - x}{2} \cdot x = \frac{100x - x^2}{2}.$$



β) Για κάθε $0 < x < 100$ είναι $E'(x) = \left(\frac{100x - x^2}{2} \right)' = \frac{(100x - x^2)'}{2} = \frac{100 - 2x}{2}.$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{100-2x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 100-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -100 \Leftrightarrow x \leq 50.$$

Για κάθε $x \in (0, 50)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (50, 100)$ είναι $E'(x) < 0$,
επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 50]$ και γνησίως
φθίνουσα στο $[50, 100)$.

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 50\text{m}$ και $y = \frac{100-50}{2} = 25\text{m}$.

γ) Το μέγιστο εμβαδό είναι $E(50) = \frac{100 \cdot 50 - 50^2}{2} = 1250\text{m}^2$.

x	0	50	100
E'	+	0	-
E		↗	↘

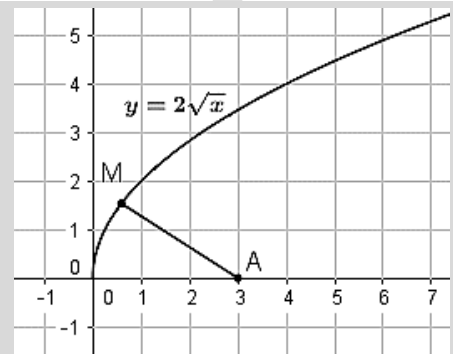
34838. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$, και το σημείο $A(3, 0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι: $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$, $x \geq 0$.

β) Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^2 - 2x + 9$, $x \geq 0$, γίνει ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .



Λύση

α) Επειδή το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη C_f , είναι $f(x) = y \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

$$\text{Η απόσταση } AM \text{ είναι: } d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + (2\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x} = \sqrt{x^2 - 2x + 9}, \quad x \geq 0.$$

β) Έστω $f(x) = x^2 - 2x + 9$, $x \geq 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x - 2$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$,

επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Άρα η f , οπότε και η d γίνεται ελάχιστη για $x = 1$. Τότε $y = 2\sqrt{1} = 2$, οπότε $M(1, 2)$.

γ) Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		↘	↗

34846. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Την παράγωγο της συνάρτησης.

β) Τα ακρότατα της συνάρτησης.

γ) i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 3$. (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι η μια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη διέρχεται από το σημείο $M\left(3, \frac{31}{3}\right)$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x - 4\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' - (x)' - (4)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1 - 0 = x^2 - 1$.

β) Για κάθε $x < -1$ ή $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $-1 < x < 1$ είναι

$f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στα

διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) - 4 = -\frac{1}{3} + 1 - 4 = -\frac{1}{3} - 3 = -\frac{1}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{10}{3} \text{ και τοπικό}$$

$$\text{ελάχιστο το } f(1) = \frac{1^3}{3} - 1 - 4 = \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{14}{3}.$$

x	0	-1	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f		↗	↘	↗	

γ) i. Έστω $(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 3$,

τότε η εφαπτομένη θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$. Όμως $\lambda = f'(x_0)$, άρα

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

$$\text{Είναι } f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} - (-2) - 4 = -\frac{8}{3} + 2 - 4 = -\frac{8}{3} - 2 = -\frac{8}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{14}{3} \text{ και}$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 2 - 4 = \frac{8}{3} - 6 = \frac{8}{3} - \frac{18}{3} = -\frac{10}{3}, \text{ οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα } \left(-2, -\frac{14}{3}\right) \text{ και } \left(2, -\frac{10}{3}\right).$$

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη είναι αυτή στο σημείο $\left(-2, -\frac{14}{3}\right)$.

Επειδή έχει $\lambda = 3$ έχει εξίσωση της μορφής $y = 3x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $\left(-2, -\frac{14}{3}\right)$, ισχύει

$$\text{ότι } -\frac{14}{3} = 3 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow -\frac{14}{3} = -6 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6 - \frac{14}{3} = \frac{18}{3} - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}, \text{ άρα η εξίσωσή της είναι } y = 3x + \frac{4}{3}.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο M , αν και μόνο αν,

$$\frac{31}{3} = 3 \cdot 3 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{31}{3} = 9 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{31}{3} = \frac{27}{3} + \frac{4}{3} \text{ ισχύει.}$$

36811. Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος του σε μέτρα (m) μετά από t δευτερόλεπτα (s) από την εκτόξευσή του δίνεται από την συνάρτηση $h(t) = 8t - t^2$, $0 \leq t \leq 8$.

α) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

β) Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση $v(t) = 8 - 2t$, $0 \leq t \leq 8$.

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s. **δ)** Σε ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος;

Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σώματος;

Λύση

α) Το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{ s}$ είναι $h(2) = 8 \cdot 2 - 2^2 = 16 - 4 = 12\text{ m}$.

β) Για κάθε $0 \leq t \leq 8$ είναι $v(t) = h'(t) = (8t - t^2)' = 8 - 2t$

γ) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{ s}$ είναι $v(2) = 8 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4\text{ m/s}$.

δ) Είναι $h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 8 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow -2t \geq -8 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$.

Για κάθε $t \in [0, 4)$ είναι $h'(t) > 0$ και για κάθε $t \in (4, 8]$ είναι $h'(t) < 0$, επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[4, 8]$.

Το ύψος h γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t=4\text{ s}$ και το μέγιστο ύψος είναι το $h(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 32 - 16 = 16\text{ m}$.

t	0	4	8
h'	+	0	-
h	↗		↘

36812. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A(3, 0)$,

όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι:

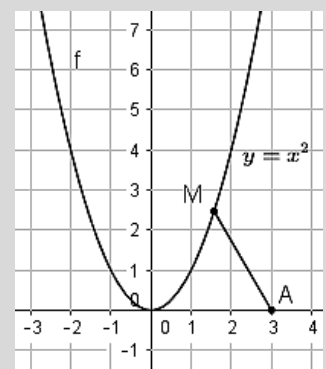
$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) i. Να αποδείξετε ότι .

ii. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη.

Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .



Λύση

α) Επειδή το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη C_f , είναι $f(x) = y \Leftrightarrow y = x^2$.

Η απόσταση AM είναι: $d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + (x^2)^2} \Leftrightarrow$

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) i. $(x-1) \cdot (2x^2 + 2x + 3) = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - 3 = 2x^3 + x - 3$

Έστω $f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(2x^3 + x - 3) = 2(x-1) \cdot (2x^2 + 2x + 3)$.

Το τριώνυμο $2x^2 + 2x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -20 < 0$, άρα $2x^2 + 2x + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-1) \cdot (2x^2 + 2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$,

επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Άρα η f , οπότε και η d γίνεται ελάχιστη για $x = 1$.

Τότε $y = 1^2 = 1$, οπότε $M(1, 1)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

γ) Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1) = \sqrt{1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 + 9} = \sqrt{5}$.

3^ο Θέμα

27959. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (3x^2 - 6x + 2023)' = 3(x^2)' - 6(x)' + (2023)' = 6x - 6$

β) Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq 2020 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2023 \geq 2020 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

27898. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
 γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)' = -2x + 2 \cdot 1 + 0 = -2x + 2$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 4 \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ισχύει.

32363. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1$, $t \geq 0$, όπου το t μετريέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

- α) Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου σε χρόνο t .
 β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$ και $t_2 = 3s$.
 γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;
 δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

Λύση

α) $v(t) = x'(t) = 2t - 4$.

β) Είναι $v(1) = 2 - 4 = -2m/s$ και $v(3) = 6 - 4 = 2m/s$.

γ) Το σημείο είναι ακίνητο τη χρονική στιγμή για την οποία $v(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow 2t = 4 \Leftrightarrow t = 2s$.

δ) Το σημείο κινείται κατά τη θετική φορά όταν $v(t) > 0 \Leftrightarrow 2t - 4 > 0 \Leftrightarrow 2t > 4 \Leftrightarrow t > 2s$ και κατά την αρνητική κατεύθυνση όταν $v(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (0, 2)$.

Στατιστική

Βασικές έννοιες Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων 2^ο Θέμα

32245. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σε ευρώ, το ποσό που ξόδεψαν 20 μαθητές στο κυλικείο του σχολείου τους, στη διάρκεια μιας μέρας.

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας, και να συμπληρώσετε τα κενά.

β) Πόσοι μαθητές ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, το πολύ 2 ευρώ;

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, τουλάχιστον 2 ευρώ;

Ποσό σε ευρώ x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i \%$
0	1			
1	9			
2	8			
3	2			
Σύνολο	20			

Λύση

α) Είναι $N_1 = v_1 = 1$, $N_2 = v_1 + v_2 = 1 + 9 = 10$,

$N_3 = N_2 + v_3 = 10 + 8 = 18$ και $N_4 = N_3 + v_4 = 18 + 2 = 20$.

Είναι $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{1}{20} = 0,05$, $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{9}{20} = 0,45$,

$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{8}{20} = 0,40$ και $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{2}{20} = 0,10$.

Είναι $f_1 \% = 100f_1 = 5$, $f_2 \% = 100f_2 = 45$, $f_3 \% = 100f_3 = 40$

και $f_4 \% = 100f_4 = 10$.

Ποσό σε ευρώ x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i \%$
0	1	1	0,05	5
1	9	10	0,45	45
2	8	18	0,40	40
3	2	20	0,10	10
Σύνολο	20		1	100

β) Το πολύ 2 ευρώ ξόδεψαν εκείνη την ημέρα όσοι είχαν ξοδέψει 0 ή 1 ή 2 ευρώ, δηλαδή $N_3 = 18$ μαθητές.

γ) Εκείνη την ημέρα 2 ευρώ ξόδεψαν 8 μαθητές και 3 ευρώ 2 μαθητές, άρα τουλάχιστον 2 ευρώ ξόδεψαν 10 μαθητές και το ποσοστό τους είναι $40\% + 10\% = 50\%$.

32246. Στον διπλανό πίνακα, δίνεται ο αριθμός των μαθητών ενός τμήματος του σχολείου με 25 μαθητές, που απουσίασαν από 0 έως και 5 ημέρες στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα.

α) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών κ , που απουσίασε από το σχολείο 3 ημέρες.

β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που δεν απουσίασε από το σχολείο.

γ) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που απουσίασε τουλάχιστον 1 ημέρα από το σχολείο.

Ημέρες απουσίας	Αριθμός μαθητών που απουσίασε
0	10
1	2
2	2
3	κ
4	2
5	1

Λύση

α) Επειδή οι μαθητές που απουσίασαν από 0 έως και 5 ημέρες στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα ήταν 25, ισχύει ότι $10 + 2 + 2 + \kappa + 2 + 1 = 25 \Leftrightarrow 17 + \kappa = 25 \Leftrightarrow \kappa = 8$.

β) Δεν απουσίασαν 10 από τους 25 μαθητές άρα το $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\%$ των μαθητών.

γ) Τουλάχιστον 1 ημέρα απουσίασαν $2 + 2 + 8 + 2 + 1 = 15$ μαθητές.

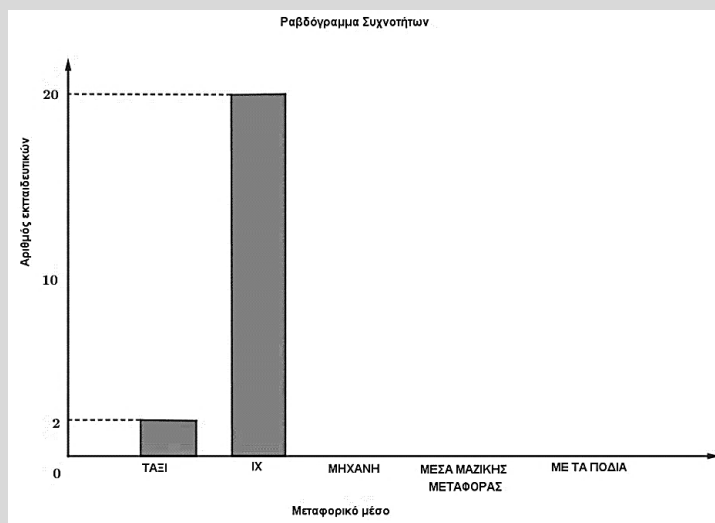
33626. Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

α) Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

β) Αφού μεταφέρετε το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων στην κόλλα σας, να βάλετε τα αριθμητικά δεδομένα που σας χρειάζονται στον κατακόρυφο άξονα και να σχεδιάσετε τις ράβδους που λείπουν.

Μεταφορικό μέσο x_i	Αριθμός εκπαιδευτικών v_i
Σύνολο	50

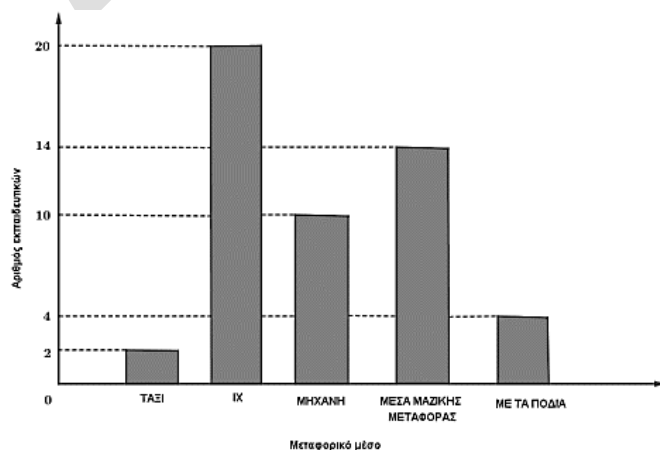


Λύση

α)

Μεταφορικό μέσο x_i	Αριθμός εκπαιδευτικών v_i
TAXI	2
ΙΧ	20
ΜΗΧΑΝΗ	10
ΜΜΜ	14
ΠΟΔΙΑ	4
Σύνολο	50

β)



34354. Στον επόμενο πίνακα σχετικών συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των γραπτών βαθμών του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών το προηγούμενο σχολικό έτος.

α) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 και μικρότερο του 12.

β) Αν οι μαθητές που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι 42400 να υπολογίσετε το πλήθος του συνόλου των μαθητών.

γ) Πόσοι μαθητές έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16; α_1

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0-4	10
4-8	10
8-12	
12-16	35
16-20	15

Λύση

α) Είναι $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 10 + f_3\% + 35 + 15 = 100 \Leftrightarrow 70 + f_3\% = 100 \Leftrightarrow f_3\% = 100 - 70 = 30$. Το 30% των μαθητών έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 και μικρότερο του 12.

β) Το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι $35\% + 15\% = 50\%$, δηλαδή οι μισοί μαθητές. Επειδή οι μισοί μαθητές είναι 42400, το σύνολο των μαθητών είναι $2 \cdot 42400 = 84800$.

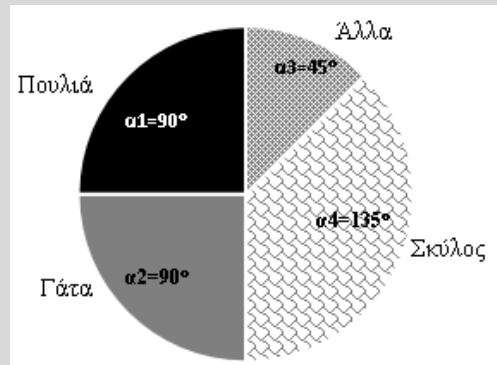
γ) Βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 έγραψε το 15% των μαθητών.

Είναι $f_5 = \frac{f_5\%}{100} = 0,15 \Leftrightarrow \frac{v_5}{84800} = 0,15 \Leftrightarrow v_5 = 12720$, δηλαδή βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 έγραψαν 12720 μαθητές.

34431. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνονται σε μοίρες τα μέτρα των γωνιών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ τα οποία αντιστοιχούν στους τέσσερις κυκλικούς τομείς, σχετικά με το αγαπημένο κατοικίδιο των μαθητών της Γ' λυκείου ενός ΕΠΑΛ.

α) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_3 , αυτών που προτιμούν πουλιά ή άλλα κατοικίδια αντίστοιχα.

β) Αν το σύνολο των μαθητών που ρωτήθηκαν ήταν $n = 120$, να βρείτε πόσοι μαθητές της τάξης αυτής προτιμούν τα πουλιά για κατοικίδιο.



Λύση

α) Ο κυκλικός τομέας για τα άλλα είναι $\alpha_3 = 45^\circ$, άρα $f_3 \cdot 360^\circ = 45^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{45}{360} = \frac{1}{8} = 0,125$.

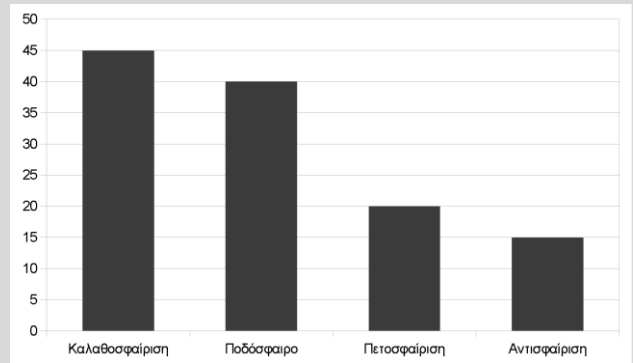
Ο κυκλικός τομέας για τα πουλιά είναι $\alpha_1 = 90^\circ$, άρα $f_1 \cdot 360^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow f_1 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 0,25$.

β) Είναι $f_1 = 0,25 \Leftrightarrow \frac{v_1}{120} = 0,25 \Leftrightarrow v_1 = 0,25 \cdot 120 = 30$, δηλαδή 30 μαθητές είχαν πουλιά ως αγαπημένο κατοικίδιο.

34432. Στο παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ επέλεξαν καθένα από τέσσερα αθλήματα για να διαγωνιστούν στο σχολικό πρωτάθλημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι καθένας από τους μαθητές επέλεξε ένα μόνο από τα αθλήματα.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών της Γ' λυκείου αυτού του ΕΠΑΛ.

β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , καθενός από τα αθλήματα που επέλεξαν οι μαθητές.



Λύση

α) Στο ραβδόγραμμα βλέπουμε ότι 45 μαθητές επέλεξαν καλαθοσφαίριση, 40 ποδόσφαιρο, 20 πετοσφαίριση και 15 αντισφαίριση, άρα το σύνολο των μαθητών είναι $45+40+20+15=120$.

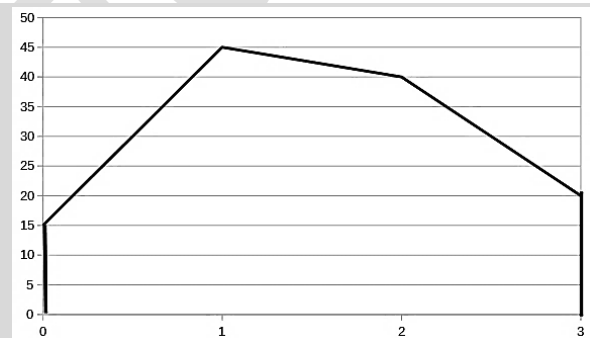
β) Είναι $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{45}{120} = 0,375$, $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{40}{120} = 0,333$,

$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{20}{120} = 0,167$ και $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{120} = 0,125$.

34434. Στο παρακάτω πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές ενός δείγματος της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα από τα τέσσερα των πανελλαδικών εξετάσεων.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος αυτού.

β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , του πλήθους των μαθητών, οι οποίοι βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα αντίστοιχα.



Λύση

α) Σε 0 μαθήματα άριστα πήραν 15 μαθητές, σε 1 μάθημα άριστα πήραν 45 μαθητές, σε 2 μαθήματα άριστα πήραν 40 μαθητές και σε 3 μαθήματα άριστα πήραν 20 μαθητές, οπότε το σύνολο των μαθητών είναι $15+45+40+20=120$.

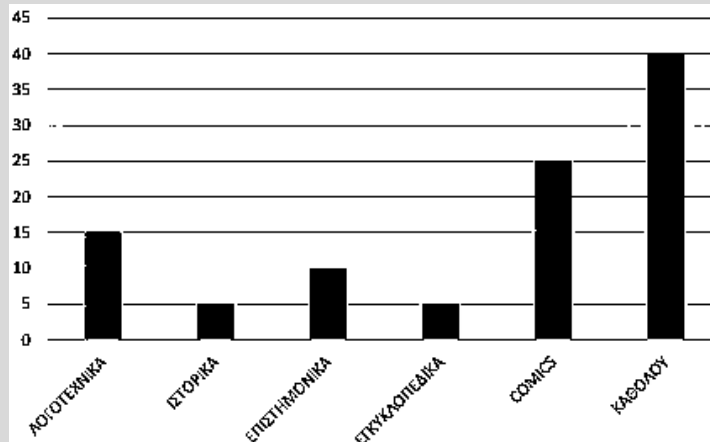
β) Άριστα σε 0 μαθήματα πήρε το $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{15}{120} = 0,125$.

Άριστα σε 1 μάθημα πήρε το $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{45}{120} = 0,375$.

Άριστα σε 2 μαθήματα πήρε το $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{40}{120} = 0,333$ και

άριστα σε 3 μαθήματα πήρε το $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{20}{120} = 0,167$.

34766. Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων για το διάβασμα βιβλίων μαθητών γυμνασίου. Κάθε μαθητής απάντησε για ένα μόνο είδος βιβλίου ή καθόλου αν δεν διαβάζει κανένα βιβλίο.. Ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τον αριθμό των μαθητών και ο οριζόντιος άξονας τα είδη των βιβλίων.



- α)** Ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος των μαθητών γυμνασίου που συμμετέχουν στην έρευνα, όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα;
β) Πόσοι μαθητές διαβάζουν λογοτεχνικά βιβλία και πόσοι επιστημονικά;
γ) i. Πόσοι μαθητές διαβάζουν βιβλία;
ii. Τι ποσοστό μαθητών δεν διαβάζει καθόλου βιβλία;

Λύση

α) Λογοτεχνικά βιβλία διαβάζουν 15 μαθητές, Ιστορία 5 μαθητές, επιστημονικά 10 μαθητές, εγκυκλοπαιδικά 5 μαθητές, comics 25 μαθητές και 40 μαθητές δεν διαβάζουν καθόλου, οπότε το σύνολο των μαθητών είναι: $15+5+10+5+25+40= 100$.

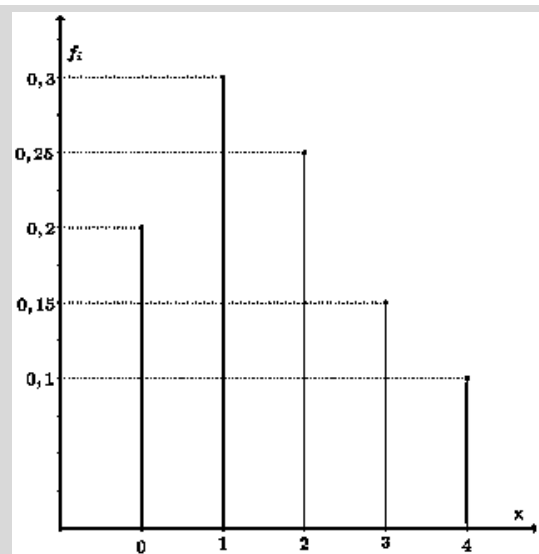
β) Λογοτεχνικά βιβλία διαβάζουν 15 μαθητές και επιστημονικά 10 μαθητές.

γ) i. όλοι εκτός από αυτούς που δεν διαβάζουν καθόλου, άρα $100-40 = 60$ μαθητές.

ii. Καθόλου δεν διαβάζουν οι 40 από τους 100 μαθητές, άρα το ποσοστό τους είναι 40%.

34813. Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων (άξονας των x) ενός δείγματος 160 μαθητών ενός σχολείου στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Για το παραπάνω δείγμα βρείτε:

- α)** το ποσοστό των μαθητών που έκανε ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως.
β) πόσοι μαθητές πραγματοποίησαν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως.
γ) το ποσοστό των μαθητών που έκανε δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.



Λύση

α) Στο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων βλέπουμε ότι ακριβώς 2 επισκέψεις έκανε το $f_3 = 0,25 \Leftrightarrow f_3\% = 25$, δηλαδή το 25% των μαθητών.

β) Στο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων βλέπουμε ότι η σχετική συχνότητα για 1 ακριβώς επίσκεψη είναι $f_2 = 0,3$, άρα $\frac{v_3}{160} = 0,3 \Leftrightarrow v_3 = 0,3 \cdot 160 = 48$ μαθητές.

γ) Τουλάχιστον 2 επισκέψεις έκαναν οι μαθητές με 2 ή 3 ή 4 επισκέψεις, δηλαδή $f_3\% + f_4\% + f_5\% = (25 + 0,15 \cdot 100 + 0,1 \cdot 100)\% = (25 + 15 + 10)\% = 50\%$.

34844. Βιοτεχνία θέλει να προμηθευτεί κουτιά συσκευασίας για τα 100 προϊόντα που παρήγαγε σε μια εβδομάδα, τα οποία μοίρασε σε τέσσερις κλάσεις ανάλογα με τον όγκο της συσκευασίας σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Όγκος (cm^3) [-)	v_i	f_i	$f_i\%$
50-60	20		
60-70	10		
70-80	40		
80-90	30		
Σύνολο	100		

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων.

β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής.

Λύση

$$34844.\alpha) f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{20}{100} = 0,2, f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{10}{100} = 0,1,$$

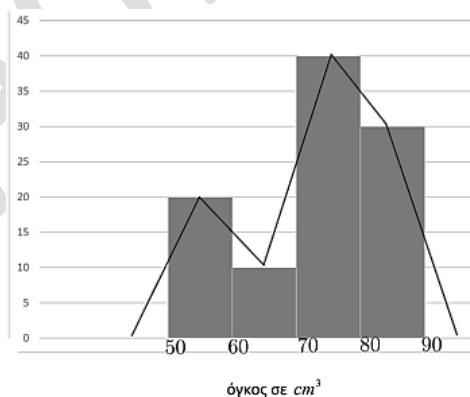
$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{40}{100} = 0,4 \text{ και } f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{30}{100} = 0,3.$$

$$\text{Είναι } f_1\% = 100f_1 = 20, f_2\% = 100f_2 = 10, f_3\% = 100f_3 = 40$$

$$\text{και } f_4\% = 100f_4 = 30.$$

Όγκος (cm^3) [-)	v_i	f_i	$f_i\%$
50-60	20	0,2	20
60-70	10	0,1	10
70-80	40	0,4	40
80-90	30	0,3	30
Σύνολο	100	1	100

β)



34927. Κατάστημα υποδημάτων κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων τις πωλήσεις σε ένα μήνα ενός σχεδίου γυναικείου παπουτσιού ανάλογα με το νούμερό του.

Νούμερο x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
36	8		
37	12		
38	20		
39	10		
Σύνολο			

Για την κατανομή αυτή:

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων v_i .

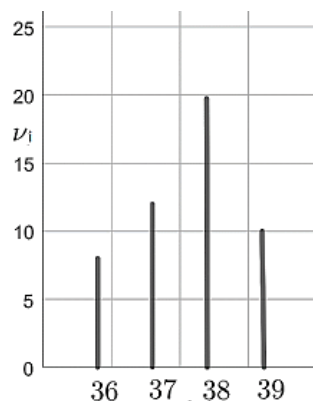
Λύση

α) Είναι $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 50$.

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{8}{50} = 0,16, f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{12}{50} = 0,24, f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{20}{50} = 0,40 \text{ και } f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{10}{50} = 0,20.$$

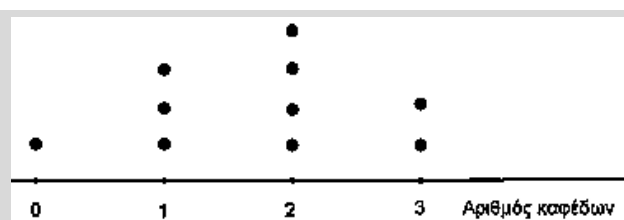
Είναι $f_1 \% = 100f_1 = 16$, $f_2 \% = 100f_2 = 24$, $f_3 \% = 100f_3 = 40$ και $f_4 \% = 100f_4 = 20$.

β)



35777. Στο παρακάτω σημειόγραμμα, βλέπουμε τον αριθμό των καφέδων που πίνουν οι 10 υπάλληλοι μιας ιδιωτικής εταιρείας κάθε ημέρα στην εργασία τους.

α) Μελετώντας το σημειόγραμμα να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.



Αριθμός καφέδων x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Σχετική συχνότητα f_i
0		
1		
2		
3		
Σύνολο	10	1

β) Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους το πολύ 2 καφέδες.

γ) Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους 3 καφέδες.

Λύση

α) Είναι $v_1=1, v_2=3, v_3=4$ και $v_4=2$.

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{1}{10} = 0,1, f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{3}{10} = 0,3, f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{4}{10} = 0,40 \text{ και } f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

β) Το πολύ 2 καφέδες την ημέρα πίνουν όλοι εκτός από αυτούς που πίνουν 3 καφέδες, άρα $10-2 = 8$ υπάλληλοι.

γ) Είναι $f_4\% = 100f_4\% = 20\%$, δηλαδή το 20% των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους 3 καφέδες.

4^ο Θέμα

32253. Οι 20 μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, ενός σχολείου, που πήραν μέρος σε ένα ετήσιο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, πήραν τους παρακάτω βαθμούς (κλίμακα 0-10).

4 10 8 8 5 6 9 7 8 9 10 9 5 6 6 7 8 8 7 6

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Σύνολο				

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των συχνοτήτων v_i , καθώς και το διάγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i \%$.

γ) Αν η διεύθυνση του σχολείου θελήσει να βραβεύσει τους μαθητές που πέτυχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους μαθητές θα βραβεύσει;

δ) Αν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, βραβεύσει το 25% των μαθητών που πήραν μέρος στο διαγωνισμό, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να βραβευτεί;

Λύση

α) Στη διαλογή βρέθηκαν: $v_1=1, v_2=2, v_3=4, v_4=3,$
 $v_5=5, v_6=3$ και $v_7=2$.

Είναι $N_1 = v_1 = 1, N_2 = v_1 + v_2 = 1 + 2 = 3,$

$N_3 = N_2 + v_3 = 3 + 4 = 7, N_4 = N_3 + v_4 = 7 + 3 = 10,$

$N_5 = N_4 + v_5 = 10 + 5 = 15, N_6 = N_5 + v_6 = 15 + 3 = 18$ και

$N_7 = N_6 + v_7 = 18 + 2 = 20.$

Είναι $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{1}{20} = 0,05, f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{2}{20} = 0,1,$

$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{4}{20} = 0,2, f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{3}{20} = 0,15, f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{5}{20} = 0,25,$

Βαθμός x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
4	1	1	5	5
5	2	3	10	15
6	4	7	20	35
7	3	10	15	50
8	5	15	25	75
9	3	18	15	90
10	2	20	10	100
Σύνολο	20		100	

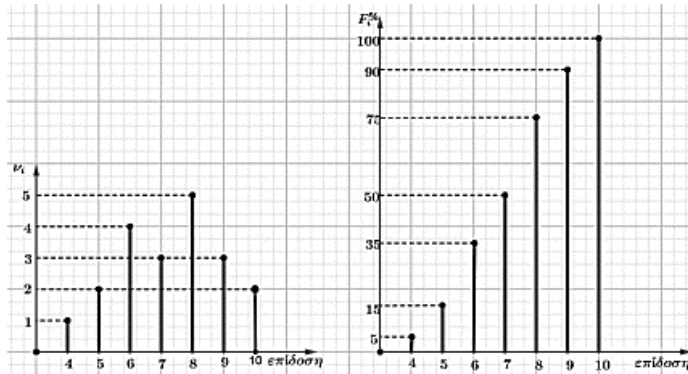
$$f_6 = \frac{v_6}{v} = \frac{3}{20} = 0,15 \text{ και } f_7 = \frac{v_7}{v} = \frac{2}{20} = 0,1.$$

Είναι $f_1\% = 100f_1 = 5$, $f_2\% = 100f_2 = 10$, $f_3\% = 100f_3 = 20$, $f_4\% = 100f_4 = 15$, $f_5\% = 100f_5 = 25$, $f_6\% = 100f_6 = 15$ και $f_7\% = 100f_7 = 10$

$$F_1\% = f_1\% = 5, F_2\% = F_1\% + f_2\% = 15, F_3\% = F_2\% + f_3\% = 35, F_4\% = F_3\% + f_4\% = 50,$$

$$F_5\% = F_4\% + f_5\% = 75, F_6\% = F_5\% + f_6\% = 90 \text{ και } F_7\% = F_6\% + f_7\% = 100.$$

β)



γ) Επίδοση μεγαλύτερη ίση του 8 έχουν οι μαθητές με επίδοση 8 ή 9 ή 10, άρα $5+3+2=10$ μαθητές.

Το 25% των μαθητών είναι $\frac{25}{100} \cdot 20 = 5$ μαθητές, επομένως θα βραβευθούν οι 2 μαθητές με επίδοση 10 και οι 3 μαθητές με επίδοση 9.

32259. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των παγωτών που κατανάλωσαν οι μαθητές της Γ' τάξης ενός σχολείου στη διάρκεια της πενθήμερης εκδρομής τους.

Αριθμός παγωτών x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0					
1					70
2	10				90
3			10		100
Σύνολο			100		

Δίνεται το $f_4\% = 10$ και ότι το 40% των μαθητών δεν έφαγε παγωτό.

α) Να δείξετε ότι η αθροιστική σχετική συχνότητα $F_1\% = 40$ και η σχετική συχνότητα $f_3 = 0,2$.

β) Να δείξετε ότι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή, είναι $n = 50$.

γ) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

δ) Πόσοι μαθητές έφαγαν τουλάχιστον ένα παγωτό;

Λύση

α) Επειδή το 40% των μαθητών δεν έφαγε παγωτό, είναι $f_1\% = 40 \Leftrightarrow f_1 = 0,4$. Τότε $F_1\% = f_1\% = 40$.
 $F_3\% = 90 \Leftrightarrow 70 + f_3\% = 90 \Leftrightarrow f_3\% = 20 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$

β) $f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow \frac{10}{v} = 0,2 \Leftrightarrow 0,2v = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{5}v = 10 \Leftrightarrow v = 50$.

Αριθμός παγωτών x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	0,4	40	20	40
1	15	0,3	30	35	70
2	10	0,2	20	45	90
3	5	0,1	10	50	100
Σύνολο	50	1	100		

$$\gamma) F_2 \% = 70 \Leftrightarrow 40 + f_2 \% = 70 \Leftrightarrow f_2 \% = 30 \Leftrightarrow f_2 = 0,3.$$

$$f_4 \% = 10 \Leftrightarrow 100f_4 = 10 \Leftrightarrow f_4 = 0,1.$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 20, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{2}{20} = 0,1, \quad f_2 = 0,3 \Leftrightarrow \frac{v_2}{50} = 0,3 \Leftrightarrow v_2 = 15 \text{ και}$$

$$f_4 = 0,1 \Leftrightarrow \frac{v_4}{50} = 0,1 \Leftrightarrow v_4 = 5.$$

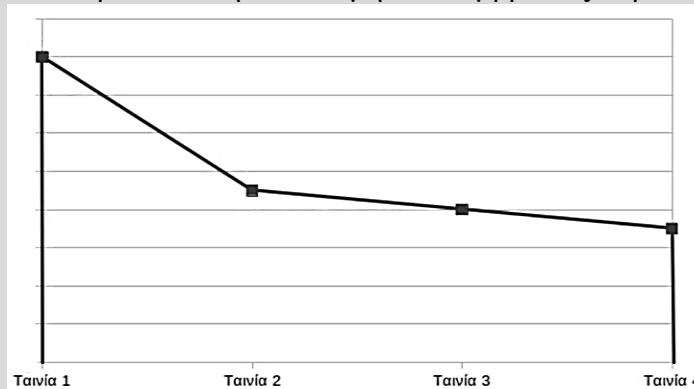
$$N_1 = v_1 = 20, \quad N_2 = v_1 + v_2 = 20 + 15 = 35, \quad N_3 = N_2 + v_3 = 35 + 10 = 45, \quad N_4 = N_3 + v_4 = 45 + 5 = 50.$$

β) τουλάχιστον ένα παγωτό έφαγαν όλοι εκτός από αυτούς που δεν έφαγαν κανένα, άρα $50 - 20 = 30$ μαθητές.

34733. Σε έναν κινηματογράφο τα εισιτήρια που έκοψαν τέσσερις ταινίες τον μήνα Νοέμβριο φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

α) Ένας μαθητής κατασκεύασε το επόμενο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων % για τους θεατές που παρακολούθησαν τον μήνα Νοέμβριο τις παραπάνω ταινίες:

Ταινία 1	150
Ταινία 2	130
Ταινία 3	70
Ταινία 4	50

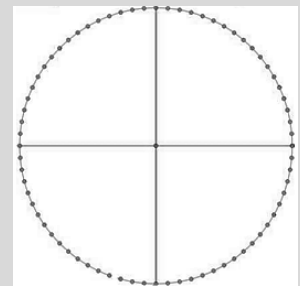


Να αιτιολογήσετε αν το πολύγωνο αυτό είναι σωστό ή λανθασμένο.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ταινία	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i
Ταινία 1	150	
Ταινία 2	130	
Ταινία 3	70	
Ταινία 4	50	
Σύνολο		

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία που θα αντιστοιχεί σε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για καθεμία από τις παραπάνω ταινίες. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κυκλικό δίσκο, ο οποίος είναι χωρισμένος σε τόξα 5° .



Λύση

α) Το διάγραμμα είναι λανθασμένο γιατί η διαφορά της ταινίας 2 από την ταινία 3 είναι 60, η διαφορά της ταινίας 2 από την ταινία 1 είναι 20 και φαίνεται μεγαλύτερη από την προηγούμενη διαφορά.

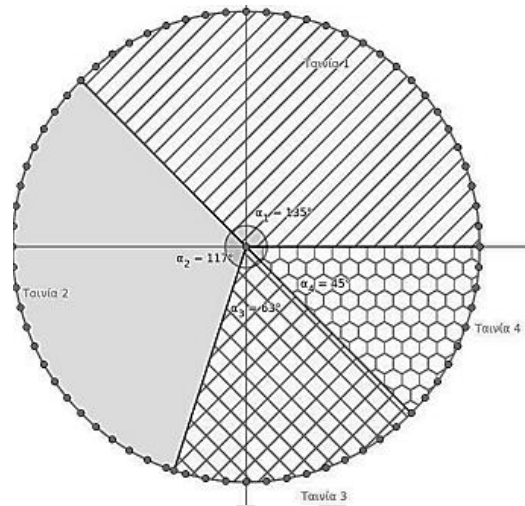
$$\beta) v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \Leftrightarrow v = 150 + 130 + 70 + 50 = 400$$

Ταινία	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i
Ταινία 1	150	0,375
Ταινία 2	130	0,325
Ταινία 3	70	0,175
Ταινία 4	50	0,125
Σύνολο	400	1

$$\text{Είναι } f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{150}{400} = 0,375, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{130}{400} = 0,325,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{70}{400} = 0,175 \text{ και } f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{50}{400} = 0,125.$$

γ) Για τη ταινία 1 είναι $\alpha_1 = f_1 \cdot 360^\circ = 0,375 \cdot 360^\circ = 135^\circ$,
για τη ταινία 2 είναι $\alpha_2 = f_2 \cdot 360^\circ = 0,325 \cdot 360^\circ = 117^\circ$,
για τη ταινία 3 είναι $\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ = 0,175 \cdot 360^\circ = 63^\circ$ και
για τη ταινία 4 είναι $\alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ = 0,125 \cdot 360^\circ = 45^\circ$.



34816. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 1200 εργαζομένων μιας επιχείρησης χωρισμένο σε πέντε κατηγορίες.

Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Ε' Κατηγορία: Κάτοχοι Διδακτορικού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνο από τις κατηγορίες αυτές.

Στις κατηγορίες Α' και Δ' ανήκει το 25% και το 12,5% των εργαζομένων αντίστοιχα.

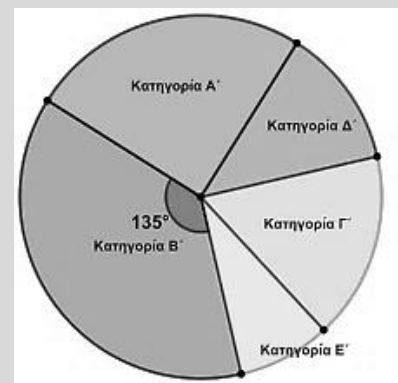
Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Β' κατηγορίας είναι 135° . Τέλος οι εργαζόμενοι της Γ' κατηγορίας είναι διπλάσιοι από τους εργαζόμενους της Ε' κατηγορίας.

α) Να αποδειχθεί ότι οι εργαζόμενοι στην κατηγορία Β' είναι 450.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων σε κάθε κατηγορία.

γ) i. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

ii. Εάν συνταξιοδοτηθούν όλοι οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ' τι ποσοστό των εργαζομένων της εταιρείας θα αντιπροσωπεύουν πλέον οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Ε';



Λύση

α) Επειδή η γωνία κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Β' κατηγορίας είναι 135° ,

$$\text{ισχύει ότι } \alpha_2 = 135^\circ \Leftrightarrow \frac{v_2}{1200} \cdot 360^\circ = 135^\circ \Leftrightarrow v_2 = \frac{135 \cdot 1200}{360} = 450.$$

β) Επειδή στη κατηγορία Α ανήκει το 25% των εργαζομένων, είναι

$$f_1 \% = 25 \Leftrightarrow f_1 = 0,25 \Leftrightarrow \frac{v_1}{1200} = 0,25 \Leftrightarrow v_1 = 0,25 \cdot 1200 = 300.$$

Επειδή στη κατηγορία Δ ανήκει το 12,5% των εργαζομένων, είναι

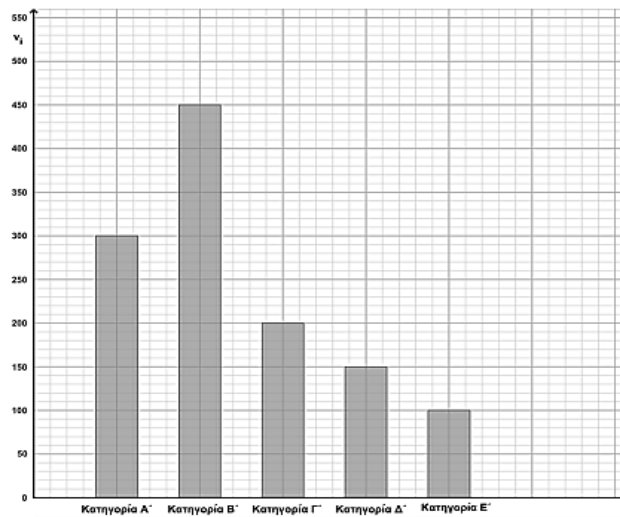
$$f_4 \% = 12,5 \Leftrightarrow f_4 = 0,125 \Leftrightarrow \frac{v_4}{1200} = 0,125 \Leftrightarrow v_4 = 0,125 \cdot 1200 = 150$$

Επειδή οι εργαζόμενοι της Γ' κατηγορίας είναι διπλάσιοι από τους εργαζόμενους της Ε' κατηγορίας, είναι $v_3 = 2v_5$.

$$\text{Είναι } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 1200 \Leftrightarrow 300 + 450 + 2v_5 + 150 + v_5 = 1200 \Leftrightarrow 3v_5 + 900 = 1200 \Leftrightarrow$$

$$3v_5 = 300 \Leftrightarrow v_5 = 100 \text{ και } v_3 = 200.$$

γ) i.



ii. Αφού θα συνταξιοδοτηθούν οι 200 εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ θα υπάρχουν 1000 εργαζόμενοι, οπότε οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Ε, θα είναι το $\frac{100}{1000} = 10\%$ των εργαζομένων.

3^ο Θέμα

34921. Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

α) Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής

X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

β) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε τη σχετική συχνότητα για το κάθε μέσο μεταφοράς και να γράψετε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που χρησιμοποιεί το κάθε μέσο.

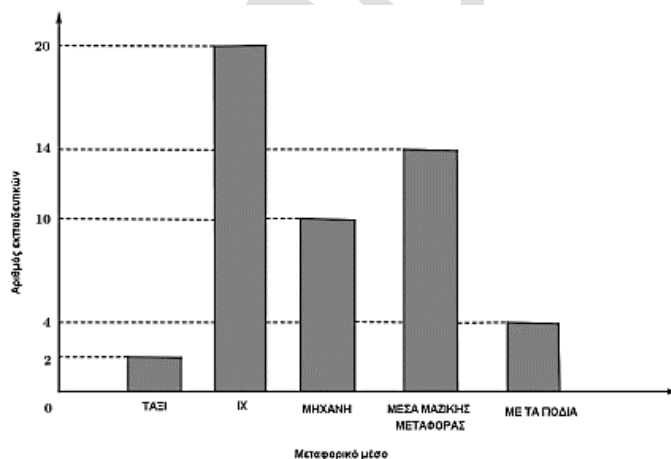
Μεταφορικό μέσο x_i	Αριθμός εκπαιδευτικών v_i
Σύνολο	50

Λύση

α)

Μεταφορικό μέσο x_i	Αριθμός εκπαιδευτικών v_i
TAXI	2
ΙΧ	20
ΜΗΧΑΝΗ	10
ΜΜΜ	14
ΠΟΔΙΑ	4
Σύνολο	50

β)



γ) Είναι $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{50} = 0,04$ και $f_1 \% = 100f_1 = 4$, δηλαδή το 4% των εκπαιδευτικών χρησιμοποιούν TAXI.

Είναι $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{20}{50} = 0,4$ και $f_2 \% = 100f_2 = 40$, δηλαδή το 40% των εκπαιδευτικών χρησιμοποιούν ΙΧ.

Είναι $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{10}{50} = 0,2$ και $f_3 \% = 100f_3 = 20$, δηλαδή το 20% των εκπαιδευτικών χρησιμοποιούν ΜΗΧΑΝΗ.

Είναι $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{50} = 0,08$ και $f_4 \% = 100f_4 = 8$, δηλαδή το 8% των εκπαιδευτικών πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

Μέτρα θέσης και διασποράς

2^ο Θέμα

25460. Οι βαθμοί 10 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν: 4, 7, 3, 5, 8, 6, 5, 9, 6, 6.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος.

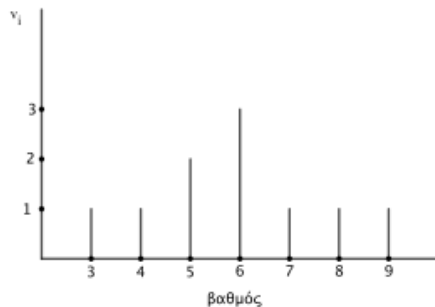
β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων.

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8;

Λύση

$$\alpha) \bar{x} = \frac{4+7+3+5+8+6+5+9+6+6}{10} = 5,9$$

β)



γ) Επειδή μόνο ένας μαθητής πήρε πάνω βαθμό μεγαλύτερο του 8, το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8 είναι $\frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$.

28615. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75.

α) Τι είδους μεταβλητή είναι η μεταβλητή 'Βάρος';

Ποιοτική, Ποσοτική Διακριτή ή Ποσοτική Συνεχής;

β) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

Λύση

α) Είναι ποσοτική συνεχής μεταβλητή γιατί μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών.

$$\beta) \text{ i. } \bar{x} = \frac{76+74+75+75+78+72+70+80+75+75}{10} = \frac{750}{10} = 75$$

ii. Οι παρατηρήσεις τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι 70, 72, 74, 75, 75, 75, 75, 76, 78, 80.

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι 10, η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης,

$$\text{δηλαδή } \delta = \frac{75+75}{2} = 75.$$

28616. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 80, 70, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α) Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών.

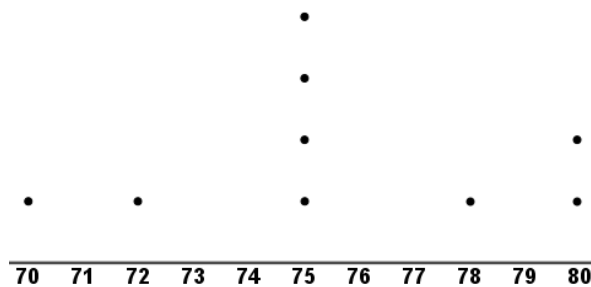
β) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

Λύση

α)



$$\beta) \text{ i. } \bar{x} = \frac{80 + 70 + 75 + 75 + 78 + 72 + 70 + 80 + 75 + 75}{10} = \frac{750}{10} = 75.$$

ii. Οι παρατηρήσεις τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι 70, 70, 72, 75, 75, 75, 75, 78, 80, 80. Επειδή οι παρατηρήσεις είναι 10, η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, δηλαδή $\delta = \frac{75 + 75}{2} = 75$.

30974. Οι προφορικοί βαθμοί έξι μαθητών στα μαθηματικά είναι 10, 13, 11, 15, 9, 14.

α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος των έξι μαθητών.

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

ii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
9		
10		
11		
13		
14		
15		

Λύση

$$\alpha) \bar{x} = \frac{10 + 13 + 11 + 15 + 9 + 14}{6} = \frac{72}{6} = 12.$$

β) i.

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
9	-3	9
10	-2	4
11	-1	1
13	1	1
14	2	4
15	3	9

$$\text{ii. } s^2 = \frac{1}{6}(9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9) = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$$

31087. Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν:

1, 4, 4, 7, 3, 6, 10, 3, 1, 2, 3.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

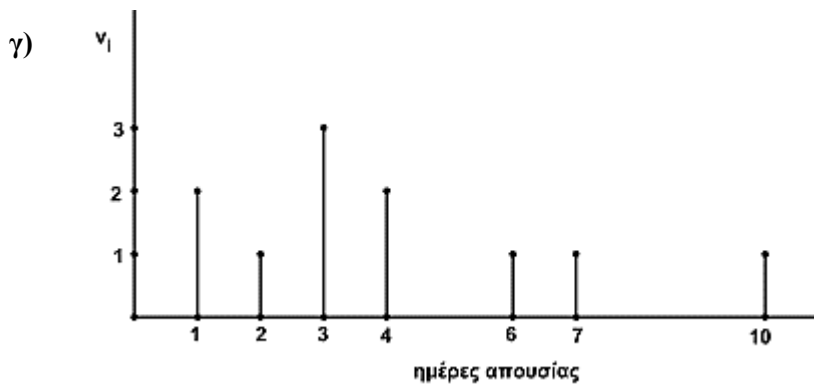
γ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

Λύση

α) Οι παρατηρήσεις τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 10.

Η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση, άρα $\delta = 3$.

$$\beta) \bar{x} = \frac{1+4+4+7+3+6+10+3+1+2+3}{11} = \frac{44}{11} = 4.$$



32243. Στον παρακάτω πίνακα, αναγράφεται ανά ημέρα, το πλήθος των απόντων μαθητών ενός τμήματος της Γ' Λυκείου.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Πλήθος απόντων μαθητών	4	3	2	2	4

Για το δείγμα των απόντων μαθητών να υπολογίσετε:

- α) το εύρος R
 β) τη διάμεσο δ
 γ) τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Λύση

α) $R = x_{\max} - x_{\min} = 4 - 2 = 2.$

δ) Το πλήθος των απόντων μαθητών ανά ημέρα σε αύξουσα σειρά είναι: 2, 2, 3, 4, 4. Επειδή η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, είναι $\delta = 3$.

γ) $\bar{x} = \frac{4+3+2+2+4}{5} = 3.$

32250. Στη διάρκεια του χειμώνα, από το σύνολο των μαθητών μιας τάξης, οι δέκα σημείωσαν τις εξής ημέρες απουσίας από το σχολείο: 6, 7, 1, 2, 3, 5, 2, 4, 4, 6. Να βρείτε:

- α) το εύρος των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.
 β) τη διάμεσο των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.
 γ) τη μέση τιμή των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

Λύση

α) $R = x_{\max} - x_{\min} = 7 - 1 = 6.$

β) Ο αριθμός των ημερών απουσίας σε αύξουσα σειρά είναι: 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7.

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι 10, η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή

$$\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4.$$

γ) $\bar{x} = \frac{1+2 \cdot 2+3+4 \cdot 2+5+6 \cdot 2+7}{10} = \frac{40}{10} = 4.$

33627. Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.

α) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.

γ) Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2.

Λύση

α) Αρχικά τοποθετούμε τους βαθμούς σε αύξουσα σειρά: 10, 13, 19, 20.

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\delta = \frac{13+19}{2} = 16$.

$$\text{β) } \bar{x} = \frac{10+13+19+20}{4} = \frac{62}{4} = 15,5.$$

$$\text{γ) } \bar{x} = \frac{10 \cdot 1 + 13 \cdot 4 + 19 \cdot 3 + 20 \cdot 2}{1 + 4 + 3 + 2} = \frac{10 + 52 + 57 + 40}{10} = \frac{159}{10} = 15,9.$$

34258. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

β) Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3$ kg, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος.

γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Η μέση τιμή της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών είναι

$$\bar{x} = \frac{76 + 74 + 75 + 75 + 78 + 72 + 70 + 80 + 75 + 75}{10} = \frac{750}{10} = 75 \text{ kg}.$$

$$\text{β) Είναι } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{75} = 0,04 = 4\%.$$

γ) Το δείγμα είναι ομοιογενές αφού $CV < 10\%$.

34814. Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά της διάρκειας του μήνα Απριλίου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις αθροιστικές συχνότητες N_i των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης, οι οποίες έχουν χωριστεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Κεντρική τιμή x_i	$x_i \cdot v_i$
0-2		5	1	
2-4		15	3	
4-6		20	5	
6-8		35	7	
8-10		40	9	
ΣΥΝΟΛΟ				

- α) να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.
 β) να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.
 γ) να βρεθεί η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης.

Λύση

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά της διάρκεια του μήνα Απριλίου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις αθροιστικές συχνότητες N_i των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης, οι οποίες έχουν χωριστεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

α) Από τον πίνακα βλέπουμε $N_5=40$ άρα το μέγεθος του δείγματος είναι $n=40$.

β) Είναι

- $N_1=5$ άρα $v_1=5$,
- $N_2 = N_1 + v_2 \Leftrightarrow 15 = 5 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = 10$,
- $N_3 = N_2 + v_3 \Leftrightarrow 20 = 15 + v_3 \Leftrightarrow v_3 = 5$,
- $N_4 = N_3 + v_4 \Leftrightarrow 35 = 20 + v_4 \Leftrightarrow v_4 = 15$,
- $N_5 = N_4 + v_5 \Leftrightarrow 40 = 35 + v_5 \Leftrightarrow v_5 = 5$ οπότε:

Ωρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Κεντρική τιμή x_i	$x_i \cdot v_i$
0-2	5	5	1	5
2-4	10	15	3	30
4-6	5	20	5	25
6-8	15	35	7	105
8-10	5	40	9	45
ΣΥΝΟΛΟ				210

γ) Η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης είναι

$$x_i = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} = \frac{210}{5} = 42 \text{ ώρες.}$$

34815. Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i , $i=1, 2, 3, 4$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με 3.
 β) Η διάμεσος δ ισούται με 3,5.

x_i	v_i
1	1
2	2
3	1
4	4

Λύση

α) Είναι $x_i = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{8} = \frac{24}{8} = 3.$

β) Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι : 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση :

$$\delta = \frac{4\text{η παρατήρηση} + 5\text{η παρατήρηση}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5.$$

34818. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα στις εξετάσεις ήταν:

8, 18, 12, 14, 13.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή.

γ) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 1, 3, 3 και 1 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή;

Λύση

α) Οι βαθμοί του μαθητή στα 5 μαθήματα σε αύξουσα σειρά είναι: 8, 12, 13, 14, 18. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση με τη μεσαία παρατήρηση δηλαδή: $\delta = 13$.

β) Η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή είναι: $\bar{x} = \frac{8+18+12+14+13}{5} = \frac{65}{5} = 13$.

γ) Με συντελεστές στάθμισης 2, 1, 3, 3 και 1 η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή είναι:

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 2 + 18 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + 13 \cdot 1}{2+1+3+3+1} = \frac{16+18+36+42+13}{10} = \frac{125}{10} = 12,5.$$

34820. Οι πόντοι που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε (5) αγώνες της ομάδας του ήταν: 20, 17, 21, 19, 23.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πόντων του καλαθοσφαιριστή.

β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος. Δίνεται ότι $\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2 = 20$, όπου

$t_i, i = 1, 2, \dots, 5$, είναι οι πόντοι του καλαθοσφαιριστή στους 5 αγώνες.

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή είναι: $\bar{x} = \frac{20+17+21+19+23}{5} = \frac{100}{5} = 20$.

β) Η διακύμανση s^2 του δείγματος είναι ίση με: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{20}{5} = 4$.

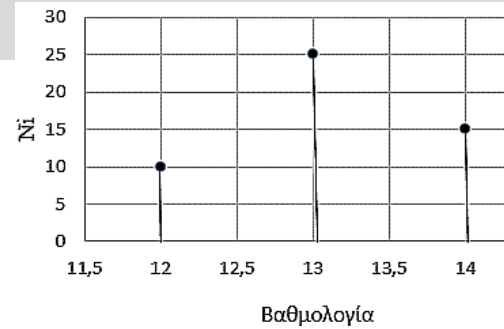
γ) Ο συντελεστής μεταβολής CV του δείγματος είναι ίσος με $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$.

Το δείγμα είναι ομοιογενές αφού $CV \leq 10\%$.

34843. Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζονται οι βαθμολογίες 50 μαθητών σε μια γραπτή δοκιμασία.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογία x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
12			
13			
14			
Σύνολο			



β) Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής της βαθμολογίας των μαθητών.

Λύση

α) Από το διάγραμμα συχνοτήτων έχουμε $v_1 = 10, v_2 = 25, v_3 = 15$ οπότε $v = v_1 + v_2 + v_3 = 50$.

Επίσης $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2, f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{25}{50} = 0,5$ και $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{15}{50} = 0,3$.

Επίσης $f_1 + f_2 + f_3 = 1$, $f_1 \% = f_1 \cdot 100 = 20, f_2 \% = f_2 \cdot 100 = 50$, $f_3 \% = f_3 \cdot 100 = 30$ και $f_1 \% + f_2 \% + f_3 \% = 100$ άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμολογία x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
12	10	0,2	20
13	25	0,5	50
14	15	0,3	30
Σύνολο	50	1	100

β) Είναι $\bar{x} = \frac{12 \cdot 10 + 13 \cdot 25 + 14 \cdot 15}{50} = \frac{120 + 325 + 210}{50} = \frac{655}{50} = 13,1$.

35475. Οι εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ ενός δείγματος δέκα καταστημάτων σε ένα εμπορικό κέντρο κατά το μήνα Απρίλιο του 2023 ήταν: 50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των εισπράξεων.

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
15				
20				
30				
50				
Σύνολο				

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος: $S^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$

Να υπολογίσετε τη διακύμανση S^2 των εισπράξεων.

Λύση

α) Είναι $\bar{x} = \frac{50+15+15+20+15+30+15+20+50+50}{100} = \frac{280}{10} = 28.$

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
15	4	-13	169	676
20	2	-8	64	128
30	1	2	4	4
50	3	22	484	1452
Σύνολο	10			2260

γ) Είναι $S^2 = \frac{1}{10} \cdot 2260 = 226$

35479. Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1=\alpha$, $x_2=\alpha+5$, $x_3=\alpha+10$ και $x_4=\alpha+35$, όπου α πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται στον παρακάτω πίνακα: όπου λ θετικός ακέραιος.

β) Να βρείτε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_1 , F_2 , F_3 και F_4 αλλά και τις σχετικές συχνότητες f_1 , f_2 , f_3 και f_4 .

γ) Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 19$, να βρείτε την τιμή του α .

x_i	F_i
α	$\frac{4}{\lambda}$
$\alpha+5$	$\frac{11}{\lambda}$
$\alpha+10$	$\frac{18}{\lambda}$
$\alpha+35$	$\frac{25}{\lambda}$

Λύση

α) Ισχύει $F_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 25.$

Είναι $F_1 = \frac{4}{25} = 0,16$, $F_2 = \frac{11}{25} = 0,44$, $F_3 = \frac{18}{25} = 0,72$ και $F_4 = 1.$

β) Επίσης $f_1 = F_1 = 0,16$, $f_2 = F_2 - F_1 = 0,28$, $f_3 = F_3 - F_2 = 0,28$ και $f_4 = F_4 - F_3 = 1 - 0,72 = 0,28.$

γ) Είναι $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 0,16\alpha + 0,28(\alpha + 5) + 0,28(\alpha + 10) + 0,28(\alpha + 35) \Leftrightarrow$

$19 = 0,16\alpha + 0,28\alpha + 1,4 + 0,28\alpha + 2,8 + 0,28\alpha + 9,8 \Leftrightarrow 19 = \alpha + 14 \Leftrightarrow \alpha = 5.$

35769. Σε μία έρευνα, για ένα δείγμα 20 οικογενειών που επιλέχτηκαν, καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών της κάθε οικογένειας, όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

α) Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των παιδιών.

β) Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i	$x_i v_i$
0	1	
1	5	
2	9	
3	3	
4	2	
Σύνολο	20	

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i
0	1
1	5
2	9
3	3
4	2
Σύνολο	20

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε.

Λύση

α) Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση :

$$\delta = \frac{10\text{η παρατήρηση} + 11\text{η παρατήρηση}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

β) Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0	1	0
1	5	5
2	9	18
3	3	9
4	2	8
ΣΥΝΟΛΟ	20	40

γ) Είναι $\bar{x} = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{1}{20} \cdot 40 = 2.$

35767. Η μέση τιμή του βάρους έξι μαθητών της Γ' Λυκείου είναι 72 κιλά.

α) Να δείξετε ότι το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι 432 κιλά.

β) Στην ομάδα των έξι μαθητών προστίθενται άλλοι δύο, με βάρος 77 και 83 κιλά αντίστοιχα. Να βρείτε:

i. το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών.

ii. τη μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών.

Λύση

α) Είναι $\bar{x} = 72 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 t_i = 72 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 t_i = 432$. Άρα το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι 432 κιλά.

β) i. Το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών είναι $\sum_{i=1}^6 t_i + 77 + 83 = 432 + 160 = 592$ κιλά.

ii. Η μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών είναι $\bar{x}' = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 t_i = \frac{1}{8} \cdot 592 = 74.$

35770. Ένα ξενοδοχείο του Ναυπλίου διαθέτει 15 δωμάτια. Στο διπλανό πίνακα, καταγράφηκε ο αριθμός των κρεβατιών ανά δωμάτιο, καθώς και ο αριθμός των δωματίων που τα έχουν. Να βρείτε:

- α) τη διάμεσο του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.
 β) το συνολικό αριθμό των κρεβατιών του ξενοδοχείου.
 γ) τη μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων v_i
1	1
2	2
3	8
4	4
Σύνολο	15

Λύση

α) Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση με τη μεσαία παρατήρηση δηλαδή : $\delta = t_g = 3$ κρεβάτια.

β) Ο συνολικός αριθμός των κρεβατιών του ξενοδοχείου είναι $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 45$.

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων v_i	$x_i v_i$
1	1	1
2	2	4
3	8	24
4	4	16
Σύνολο	15	45

γ) Η μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο είναι .

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{1}{15} \cdot 45 = 3 \text{ κρεβάτια.}$$

35772. Η κατανομή των ηλικιών των νέων κατασκηνωτών ενός κάμπινγκ της Αμοργού, είναι περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x} = 25$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,08$.

- α) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.
 β) Να βρεθεί το εύρος των ηλικιών της κατανομής.
 γ) Αν γνωρίζουμε ότι 200 είναι όλοι οι κατασκηνωτές του κάμπινγκ, να βρείτε πόσοι από αυτούς έχουν ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } CV = 0,08 \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = 0,08 \Leftrightarrow \frac{s}{25} = 0,08 \Leftrightarrow s = 0,08 \cdot 25 \Leftrightarrow$$

$$s = 2.$$

$$\beta) \text{ Είναι } R \approx 6s = 12.$$

γ) Η κατανομή είναι περίπου κανονική άρα ηλικία κάτω των 25 έχουν οι μισοί δηλαδή 100 κατασκηνωτές.

35774. Οι βαθμοί που έγραψε στα πέντε τεστ του 1^{ου} τετραμήνου, για το μάθημα των Μαθηματικών, ένας μαθητής της Γ' Λυκείου είναι:

12, 14, 8, 20, 16.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ.

β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

ii. Αξιοποιώντας τον συμπληρωμένο πίνακα του ερωτήματος (β, i), να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση, της βαθμολογίας του μαθητή για τα πέντε τεστ.

Βαθμός x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
12		
14		
8		
20		
16		
Σύνολο		

Λύση

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ είναι :

$$\bar{x} = \frac{12+14+8+20+16}{5} = \frac{70}{5} = 14.$$

β) i.

Βαθμός x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
12	-2	4
14	0	0
8	-6	36
20	6	36
16	2	4
Σύνολο		80

ii. Η διακύμανση είναι ; $s^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} \cdot 80 = 16$ και η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$.

35779. Δίνονται οι πέντε αριθμοί 6, 5, 28, 3, 8.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω πέντε αριθμών.

β) Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω πέντε αριθμών.

γ) Στους παραπάνω πέντε αριθμούς, δίνεται ως έκτος, ο αριθμός 16.

Να βρείτε τη διάμεσο των έξι αριθμών.

Λύση

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι : $\bar{x} = \frac{6+5+28+3+8}{5} = \frac{50}{5} = 10.$

β) Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση με τη μεσαία παρατήρηση δηλαδή : $\delta = 6$.

γ) Οι έξι αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 3, 5, 6, 8, 16, 28.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση

$$\delta = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{6+8}{2} = 7.$$

35780. Δίνονται οι αριθμοί: 2, 3, 4, 6, 10.

α) Να βρεθεί η μέση τιμή τους.

β) Να δείξετε ότι η διασπορά τους είναι $s^2 = 8$.

γ) Να βρείτε την τυπική απόκλιση, του παραπάνω δείγματος των πέντε αριθμών.

Λύση

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι : $\bar{x} = \frac{2+3+4+6+10}{5} = \frac{25}{5} = 5$.

β) Η διακύμανση είναι ; $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (10-5)^2}{5} \Leftrightarrow$
 $s^2 = \frac{9+4+1+1+25}{5} = \frac{40}{5} = 8$.

γ) Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$..

35781. Οι υπάλληλοι μιας μεγάλης εταιρείας πετρελαιοειδών, χρησιμοποιούν το καφέ και το εστιατόριο της εταιρείας καθημερινά. Αν τα χρήματα που ξοδεύουν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 10$ ευρώ και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,2$ τότε:

α) να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας καθημερινά, είναι $s = 2$ ευρώ.

β) i. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ.

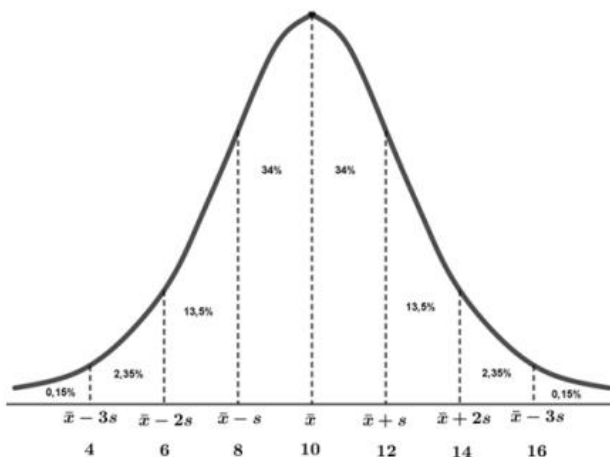
ii. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ.

Λύση

Οι υπάλληλοι μιας μεγάλης εταιρείας πετρελαιοειδών, χρησιμοποιούν το καφέ και το εστιατόριο της εταιρείας καθημερινά. Αν τα χρήματα που ξοδεύουν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 10$ ευρώ και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,2$ τότε:

α) Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{s}{10} \Leftrightarrow s = 2$ ευρώ.

β) Δίνεται ότι η κατανομή των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι είναι κανονική άρα :



i. το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ, είναι το 50%.

ii. το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ, είναι το 2,5%.

36570. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή είναι 14, 18, 20, 14, 12, 12, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s = 3$.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος βαθμών.

β) Να βρείτε τη διάμεσο δ και το εύρος R του δείγματος.

γ) Αν $\bar{x} = 15$, να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή μεταβολής CV.

Λύση

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι : $\bar{x} = \frac{14+18+20+14+12+12}{6} = \frac{90}{6} = 15$.

β) Οι έξι αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 12, 12, 14, 14, 18, 20.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση

$$\delta = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{14 + 14}{2} = 14.$$

Το εύρος R του δείγματος είναι : $R = x_{\max} - x_{\min} = 20 - 12 = 8$.

γ) Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%$ ευρώ.

36571. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή για το Α' τετράμηνο είναι 16, 18, 18, 12, 16, 10, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Αν η μέση τιμή των βαθμών είναι $\bar{x} = 15$ και η τιμή της διασποράς $s^2 = 9$.

α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s και τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος των βαθμών.

β) Να βρείτε τη διάμεσο δ του δείγματος.

γ) Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών του μαθητή για το Β' τετράμηνο αυξήθηκαν όλοι κατά δύο μονάδες. Να υπολογίσετε την νέα μέση τιμή των βαθμών του Β' τετράμηνου.

Λύση

α) Η τυπική απόκλιση s είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{9} = 3$ και ο συντελεστής μεταβολής CV του δείγματος των βαθμών είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%$.

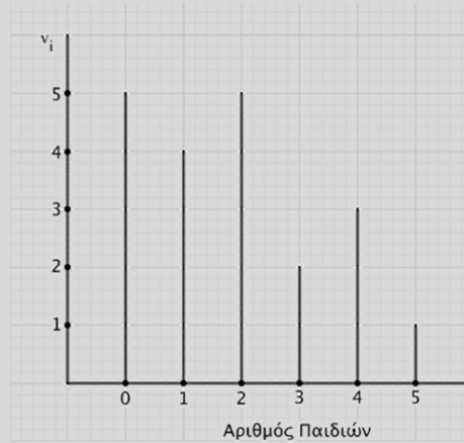
β) Οι έξι αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 10, 12, 16, 16, 18, 18.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση

$$\delta = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{16 + 16}{2} = 16.$$

γ) Επειδή όλοι οι βαθμοί των γραπτών αυξήθηκαν κατά δύο μονάδες η νέα μέση τιμή προκύπτει από την αύξηση της αρχικής μέσης τιμής κατά δύο μονάδες, δηλαδή $\bar{x}' = \bar{x} + 2 = 15 + 2 = 17$. Άρα, η νέα μέση τιμή των βαθμών του Β' τετράμηνου είναι $\bar{x}' = 17$.

36813. Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των παιδιών (οριζόντιος άξονας) είκοσι (20) οικογενειών.



α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0		
1		
2		
3	2	6
4		
5		
Σύνολο	$v = 20$	

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των 20 οικογενειών.

γ) Ποιο είναι το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά;

Λύση

α)

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0	5	0
1	4	4
2	5	10
3	2	6
4	3	12
5	1	5
Σύνολο	$v = 20$	37

β) Η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των οικογενειών είναι .

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \frac{1}{20} \cdot 37 = 1,85 .$$

γ) Το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά είναι : $2 + 3 + 1 = 6$.

4^ο Θέμα

32251. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους στο σχολείο, ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται ότι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των χρόνων είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του $s^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x} = 10$.

β) Να υπολογίσετε (προσεγγιστικά), το εύρος του δείγματος των χρόνων.

γ) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών, που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο:

i. το πολύ 10 λεπτά

ii. πάνω από 14 λεπτά

iii. από 6 έως 12 λεπτά.

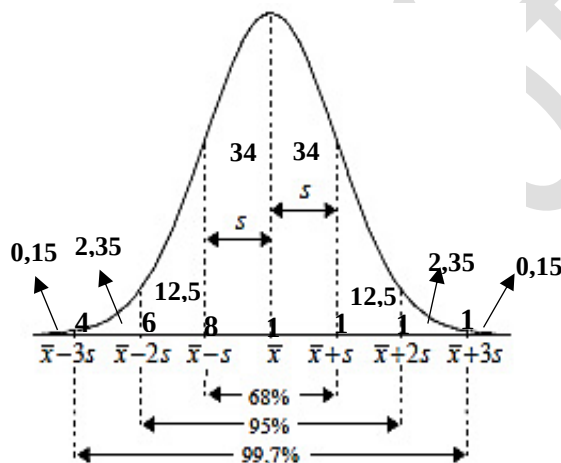
Λύση

α) Είναι $s^2 = 4 \Leftrightarrow s = 2$

$$CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 10$$

β) Επειδή οι χρόνοι των μαθητών ακολουθούν τη κανονική κατανομή είναι $R \approx 6s = 12$.

γ)



Με βάση το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι:

i. το πολύ 10 λεπτά έκανε το 50% των μαθητών

ii. πάνω από 14 λεπτά έκανε το $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ των μαθητών.

iii. από 6 έως 12 λεπτά έκανε το $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$.

32256. Στις τέσσερις κλάσεις του παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται τα χρόνια εργασίας του συνόλου των εκπαιδευτικών ενός Λυκείου της Αθήνας.

α) Αφού μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά του, συναρτήσει του κ , όπου αυτό είναι αναγκαίο.

Χρόνια υπηρεσίας	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[0, 10)		10	
[10, 20)		15	
[20, 30)		κ	
[30, 40)		5	
Σύνολο			

β) Αν ο μέσος χρόνος εργασίας των παραπάνω εκπαιδευτικών είναι τα 19 χρόνια, να δείξετε ότι το $\kappa = 20$. Πόσοι ήταν συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου;

Για $\kappa = 20$,

γ) να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Χρόνια υπηρεσίας	v_i	f_i	N_i	F_i	$F_i \%$
[0, 10)	10				
[10, 20)	15				
[20, 30)	20				
[30, 40)	5				
Σύνολο					

δ) να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, και να βρείτε τη διάμεσο του χρόνου εργασίας.

Λύση

α)

Χρόνια Υπηρεσίας	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[0,10)	5	10	50
[10,20)	15	15	225
[20,30)	25	κ	25κ
[30,40)	35	5	175
	Σύνολο	$30+\kappa$	$450+25\kappa$

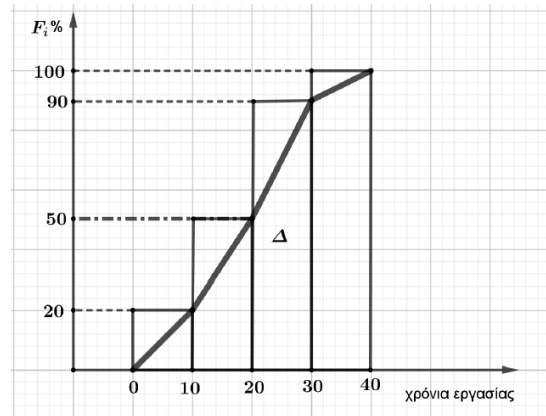
β) Είναι $\bar{x} = 19 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = 19 \Leftrightarrow \frac{450 + 25\kappa}{30 + \kappa} = 19 \Leftrightarrow 450 + 25\kappa = 570 + 19\kappa \Leftrightarrow 6\kappa = 120 \Leftrightarrow \kappa = 20$.

Συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου ήταν $30 + 20 = 50$.

γ)

Χρόνια Υπηρεσίας	v_i	f_i	N_i	F_i	$F_i \%$
[0,10)	10	0,2	10	0,2	20
[10,20)	15	0,3	25	0,5	50
[20,30)	20	0,4	45	0,9	90
[30,40)	5	0,1	50	1	100
	50	1			

δ) Παίρνοντας υπόψιν τον πίνακα του ερωτήματος (γ), κατασκευάζουμε αρχικά το παρακάτω ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$. Κατόπιν ενώνουμε τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, ξεκινώντας από το αριστερό κάτω άκρο του πρώτου ορθογωνίου, κατασκευάζουμε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων $F_i\%$. Επίσης η διάμεσος θα έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $\% 50 F_i =$, οπότε όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι η τετμημένη του Δ . Επομένως $\delta = 20$.



32257. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:

10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10.

α) Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο της βαθμολογίας.

β) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι $\bar{x} = 12$.

γ) Να δείξετε ότι η διασπορά της βαθμολογίας είναι $s^2 = 18,8$ και να δείξετε ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι: $\sqrt{18,8} \approx 4,3$.

δ) Ένας μαθητής της τάξης ισχυριζόμενος ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές, διατύπωσε την άποψη ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, θα προκύψει ένα δείγμα αριθμών (όχι βαθμών) που θα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:

10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10.

α) Οι δέκα αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 17, 18, 20

Το εύρος R του δείγματος είναι: $R = x_{\max} - x_{\min} = 20 - 7 = 13$.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός οπότε η διάμεσος θα είναι ίση

$$\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10.$$

$$\beta) \text{ Είναι: } \bar{x} = \frac{7 + 8 + 9 + 10 + 10 + 10 + 11 + 17 + 18 + 20}{10} = \frac{120}{10} = 12.$$

$$\gamma) \text{ Η διακύμανση είναι: } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$\frac{(7-12)^2 + (8-12)^2 + (9-12)^2 + 3 \cdot (10-12)^2 + (11-12)^2 + (17-12)^2 + (18-12)^2 + (20-12)^2}{10} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{25 + 16 + 9 + 12 + 1 + 25 + 36 + 64}{10} = \frac{188}{10} = 18,8.$$

$$\text{Είναι } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{12} = \frac{4,3}{12} = 0,36 = 36\% > 10\% \text{ άρα το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές.}$$

δ) Αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, το νέο δείγμα αριθμών που θα προκύψει θα έχει μέση τιμή: $\bar{x}' = \bar{x} + 33 = 45$ και τυπική απόκλιση $s' = s = 4,3$.

Επομένως ο νέος συντελεστής μεταβολής του θα είναι: $CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{4,3}{45} = 9,5\% < 10\%$ οπότε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψει θα είναι ομοιογενές. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

33573. Δύο διαφορετικά δείγματα μίας μεταβλητής X ενός πληθυσμού έχουν τις παρακάτω τιμές:

Δείγμα 1: 8, 9, 10, 11, 12 και Δείγμα 2: 8, 10, 10, 10, 12

α) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο δ .

β) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s .

γ) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV .

δ) Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη:

«Αν δύο διαφορετικά δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή και διάμεσο, τότε εμφανίζουν και την ίδια ομοιογένεια.»

Συμφωνείτε με αυτήν την άποψη; Χρησιμοποιώντας τα δείγματα που δόθηκαν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Το 1° δείγμα έχει : μέση τιμή $\bar{x} = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$ και το 2° έχει μέση τιμή

$$\bar{x}' = \frac{8+10+10+10+12}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός και στα δύο δείγματα οπότε η διάμεσος τους θα είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή η τρίτη παρατήρηση οπότε $\delta = 10 = \delta'$.

β) Για το 1° δείγμα είναι $s^2 = \frac{(8-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (12-10)^2}{5} \Leftrightarrow$

$$s^2 = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow s^2 = 2 \text{ οπότε έχει τυπική απόκλιση } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}.$$

Για το 2° δείγμα είναι $s^2 = \frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (10-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2}{5} \Leftrightarrow$

$$s^2 = \frac{4+0+0+0+4}{5} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow s^2 = 1,6 \text{ οπότε έχει τυπική απόκλιση } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,6}.$$

γ) Για το 1° δείγμα είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ και για το 2° δείγμα είναι $CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{\sqrt{1,6}}{10}.$

δ) Είναι λάθος η άποψη όπως φαίνεται από τα δύο δείγματα, τα οποία έχουν έχουν ίδια μέση τιμή και διάμεσο όμως ο συντελεστής μεταβολής του πρώτου δείγματος είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή

μεταβολής του δεύτερου δείγματος γιατί $\frac{\sqrt{2}}{10} > \frac{\sqrt{1,6}}{10} \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt{1,6} \Leftrightarrow 2 > 1,6$ ισχύει. Επομένως τα

δείγματα διαφέρουν ως προς την ομοιογένεια.

33631. Ένας καθηγητής Μαθηματικών που διδάσκει στο ΕΠΑΛ μιας πόλης, κατέγραψε τη βαθμολογία που πέτυχαν οι 20 μαθητές του, στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, στην κλίμακα 0 – 20. Στη συνέχεια κατασκεύασε το διπλανό πίνακα, όπου σημείωσε τους βαθμούς που πέτυχαν οι μαθητές του (η στήλη των x_i) και το πλήθος-συχνότητα των μαθητών που τους πέτυχε (η στήλη των v_i). N_i είναι η αθροιστική συχνότητα.

α) Να συμπληρώσετε τις δύο στήλες του πίνακα που δεν έχουν συμπληρωθεί.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας, που πέτυχαν οι μαθητές του ΕΠΑΛ αυτού.

Βαθμός x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	N_i
6	3		
8	2		
10	4		
11	1		
14	5		
15	1		
18	3		
20	1		
Σύνολο	20		

γ) Όταν ο σύλλογος των διδασκόντων του ΕΠΑΛ αυτού, συζήτησε τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές τους, ο καθηγητής των Μαθηματικών υποστήριξε ότι:

- i. το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε κάτω από τη βάση (κάτω από 10) ξεπερνάει το 52% και είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου.
- ii. το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε άριστα (από 18 έως 20) είναι μόλις το 5%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου είναι τετραπλάσιο αυτού.

Συμφωνείτε με τις απόψεις που διατύπωσε ο Μαθηματικός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

Βαθμός	Συχνότητα		
x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	N_i
6	3	18	3
8	2	16	5
10	4	40	9
11	1	11	10
14	5	70	15
15	1	15	16
18	3	54	19
20	1	20	20
Σύνολο	20	244	

β) Η μέση τιμή της βαθμολογίας, που πέτυχαν οι μαθητές του

$$\text{ΕΠΑΛ αυτού είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{v} = \frac{244}{20} = 12,2.$$

γ) i. Οι μαθητές του σχολείου που έγραψαν κάτω από τη

βάση είναι $N_2 = 5$ και το ποσοστό τους: $\frac{5}{20} \% = 0,25\%$.

Το αντίστοιχο πανελλαδικό ποσοστό είναι 52%, άρα είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου. Επομένως ο Μαθηματικός έχει δίκιο.

ii. το ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε άριστα είναι

$$\frac{v_7 + v_8}{v} \% = \frac{4}{20} \% = 20\% \text{ οπότε είναι τετραπλάσιο του}$$

ποσοστού που έγραψαν άριστα στις Πανελλαδικές εξετάσεις.

Άρα ο μαθηματικός έχει δίκιο και στις δύο απόψεις του.

34448. Μελετήσαμε ένα δείγμα I.X. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	50	0,125				
2	110	0,275				
3		0,3				
4	30	0,075				
5	90					
ΣΥΝΟΛΑ	$v=400$					

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.

γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{7} = 2,65$)

Λύση

α) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	50	0,125	12,5	50	0,125	12,5
2	110	0,275	27,5	160	0,4	40
3	120	0,3	30	280	0,7	70
4	30	0,075	7,5	310	0,775	77,5
5	90	0,225	22,5	400	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	$v=400$	1	100			

β)

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
1	50	50	200
2	110	220	110
3	120	360	0
4	30	120	30
5	90	450	360
ΣΥΝΟΛΑ	$v=400$	1200	700

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{1200}{400} = 3.$$

Έχουμε άρτιο αριθμό παρατηρήσεων άρα η διάμεσος θα ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή: $\delta = \frac{x_{200} + x_{201}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$

$$\gamma) \text{ Η διακύμανση του δείγματος είναι } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{700}{400} = \frac{7}{4} \text{ οπότε η τυπική απόκλιση είναι}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ίσος με } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{3} = \frac{1,32}{6} = 44\% > 10\%.$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές όπως ισχυρίζεται ο Γιάννης.

34817. Στις 10 το πρωί, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου ήταν:

Πόλη Α: 20 17 18 20 17 16 17 16 18 10

Πόλη Β: 18 22 20 17 16 16 15 17 12 16

α) Να βρείτε τη μέση και τη διάμεσο θερμοκρασία των πόλεων Α και Β, για το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου.

β) Ο Γιάννης υπολόγισε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β και βρήκε ότι είναι: $S_A = 2,66$ και $S_B = 2,59$

αντίστοιχα. Να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να

δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας

(Δίνεται ότι: $\frac{2,59}{16,9} = 0,153$ και $\frac{2,66}{11,9} = 0,223$).

Λύση

α) Είναι $\bar{x}_A = \frac{20+17+18+20+17+16+17+16+18+10}{10} = \frac{169}{10} = 16,9$ και

$\bar{x}_B = \frac{18+22+20+17+16+16+15+17+12+16}{10} = \frac{169}{10} = 16,9$.

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά οπότε έχουμε :

- για τις θερμοκρασίες της πόλης A : 10 16 16 17 17 17 18 18 20 20 .

Έχουμε άρτιο αριθμό παρατηρήσεων άρα η διάμεσος θα ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$\delta_A = \frac{17+17}{2} = 17.$$

- για τις θερμοκρασίες της πόλης B : 12 15 16 16 16 17 17 18 20 22 .

Έχουμε άρτιο αριθμό παρατηρήσεων άρα η διάμεσος θα ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$\delta_A = \frac{16+17}{2} = 16,5.$$

β) $S_A^2 = 2,66^2 = 7,0756 > S_B^2 = 2,59^2 = 6,7081$ άρα οι θερμοκρασίες της πόλης A έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Οι σωστές θερμοκρασίες της πόλης A είναι : 15 12 13 15 12 11 12 11 13 5.

Η νέα μέση τιμή θα είναι ελαττωμένη κατά 5 μονάδες άρα $\bar{x}'_A = 16,9 - 5 = 11,9$ ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμείνει ίδια.

Ο συντελεστής μεταβολής για την πόλη A θα είναι ίσος με $CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}'_A} = \frac{2,66}{11,9} = 22,3\%$ και για την πόλη B

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{2,59}{16,9} = 15,3\%.$$

Είναι $CV_A > CV_B$ άρα οι τιμές της θερμοκρασίας της πόλης β παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

34527. Ο κυβισμός των κινητήρων X, σε κυβικά εκατοστά ενός δείγματος 10000 αυτοκινήτων, ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 5000 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1800 κυβικά εκατοστά.

α) Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος, είναι 1800 κυβικά εκατοστά.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο παραπάνω δείγμα υπάρχουν 3400 αυτοκίνητα που ο κυβισμός τους είναι από 1800 κυβικά εκατοστά έως 2000 κυβικά εκατοστά, να βρείτε την τυπική απόκλιση s του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι σε μια κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι μικρότερες της μέσης τιμής $\bar{x}$.

Στο δείγμα μας που αποτελείται από 10000 αυτοκίνητα, τα 5000 που αντιστοιχούν στο 50% έχουν κυβισμό μικρότερο από 1800 κυβικά εκατοστά οπότε $\bar{x} = 1800$.

β) Τα 3400 αυτοκίνητα αντιστοιχούν στο 34% του δείγματος.

Σε μια κανονική κατανομή 34% αντιστοιχεί στο διάστημα $(\bar{x}, \bar{x} + s)$ δηλαδή στο διάστημα $(1800, 1800 + s)$.

Τα 3400 αυτοκίνητα έχουν κυβισμό από 1800 έως 2000 κυβικά εκατοστά, άρα $1800 + s = 2000 \Leftrightarrow s = 200$.

γ) Στην κανονική κατανομή είναι $R \approx 6s = 1200$.

35476. Μια εταιρεία απασχολεί 7 υπαλλήλους, οι 4 από αυτούς εργάζονται στο τμήμα Α και οι υπόλοιποι 3 στο τμήμα Β.

Οι μισθοί (σε ευρώ) των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι:

990, 910, 960, 940.

Ενώ των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι:

990, 980, 1000.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας, που έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β.

γ) Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των μισθών των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι 960 ευρώ ενώ η μέση τιμή των μισθών των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι 990 ευρώ. Η εταιρεία θέλει να προσλάβει έναν υπάλληλο στο τμήμα Β ώστε η νέα μέση τιμή των μισθών των εργαζομένων του τμήματος Β να είναι ίση με αυτή του τμήματος Α, ποιος πρέπει να είναι ο μισθός του υπαλλήλου που θα προσληφθεί;

Λύση

α) Είναι $\bar{x}_A = \frac{990 + 910 + 960 + 940}{4} = \frac{3800}{4} = 950$.

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά οπότε έχουμε :

- για τις θερμοκρασίες της πόλης Α : 910 940 960 990 .

Έχουμε άρτιο αριθμό παρατηρήσεων άρα η διάμεσος θα ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$\delta_A = \frac{940 + 960}{2} = 950.$$

β) Είναι $\bar{x}_B = \frac{990 + 980 + 1000}{3} = \frac{2970}{3} = 990$.

Από την υπόθεση 3 εργαζόμενοι έχουν μισθό κάτω των 990 ευρώ δηλαδή τα $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$ των εργαζομένων.

γ) Τα δύο τμήματα μετά την πρόσληψη του νέου υπαλλήλου στο τμήμα Β θα έχουν τον ίδιο αριθμό εργαζομένων, 4 άτομα κάθε τμήμα.

Για να έχουν την ίδια μέση τιμή μισθών θα πρέπει το άθροισμα των μισθών να είναι το ίδιο και στα δύο τμήματα. Γνωρίζουμε ότι: $\bar{x}_A = 950$ και ότι οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α είναι 4, άρα το άθροισμα των μισθών τους θα είναι: $950 \cdot 4 = 3800$ ευρώ.

35092. Έστω α ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνεται η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	v_i	$x_i v_i$
30-40		α	
40-50		2α	
50-60		3α	
60-70		4α	
Σύνολο		10α	

α) i. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

ii. Να δείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\bar{x} = 55$.

β) i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμή x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
30-40		α			
40-50		2α			
50-60		3α			
60-70		4α			
Σύνολο		10α			

ii. Να βρείτε την διακύμανση s^2 της κατανομής.

γ) Να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής συχνοτήτων του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	v_i
30-40	10
40-50	20
50-60	30
60-70	40
Σύνολο	100

Λύση

α) i. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	v_i	$x_i v_i$
30-40	35	α	35α
40-50	45	2α	90α
50-60	55	3α	165α
60-70	65	4α	260α
Σύνολο		10α	550α

ii. Είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{550\alpha}{10\alpha} = 55$.

β) i.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμή x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
30-40	35	α	-20	400	400α
40-50	45	2α	-10	100	200α
50-60	55	3α	0	0	0
60-70	65	4α	10	100	400α
Σύνολο		10α			1000α

ii. Είναι $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{1000\alpha}{10\alpha} = 100$.

γ) Η νέα κατανομή προκύπτει από την κατανομή του ερωτήματος α) για $\alpha=10$. Άρα $\bar{x}=55$ και $s^2=100$.

35477. Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

α) Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:

i. Από 4 έως 6 λεπτά.

ii. Από 3 έως 6 λεπτά.

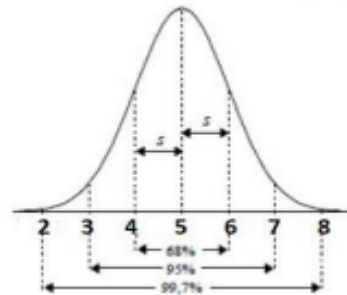
β) Αν το πλήθος των πολιτών που εξυπηρετήθηκαν το μήνα Μάιο σε αυτή την υπηρεσία ήταν 5000 πόσοι περίπου πολίτες περίμεναν από 5 έως 6 λεπτά μέχρι να εξυπηρετηθούν;

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

δ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Λύση

35477. α) Από την υπόθεση έχουμε : $\bar{x} = 5$ και $s=1$.



Με την βοήθεια της καμπύλης της κανονικής κατανομής έχουμε:

i. Από 4 έως 6 λεπτά εξυπηρετούνται περίπου το 68% των πολιτών.

ii. Από 3 έως 6 λεπτά εξυπηρετούνται το: $68 + \frac{95-68}{2} = 68 + 13,5 = 81,5\%$ των πολιτών .

β) Από 5 έως 6 λεπτά εξυπηρετούνται το 34% των πολιτών . Οι πολίτες που εξυπηρετήθηκαν το μήνα

Μάιο ήταν 5000, το 34% αυτών είναι: $\frac{34}{100} \cdot 5000 = 1700$ πολίτες.

γ) Είναι $R \approx 6s = 6$.

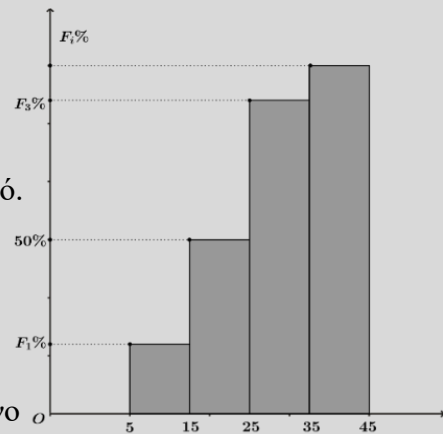
δ) Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$.

35478. Οι χρόνοι σε λεπτά, που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5,45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

α) Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

β) i. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$.

ii. και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας.



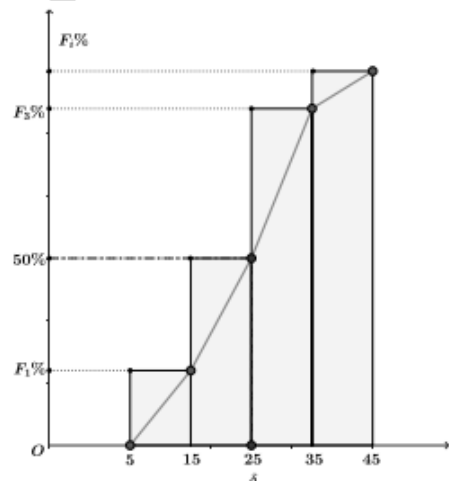
Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5,15)$		$\alpha+4$			
$[15,25)$		$3\alpha-6$			
$[25,35)$		$2\alpha+8$			
$[35,45)$		$\alpha-2$			
Σύνολο					

Λύση

α) Από τον κατακόρυφο άξονα στο 50% φέρνουμε παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσουμε την πολυγωνική γραμμή. Από το σημείο που τέμνει το πολύγωνο φέρνουμε παράλληλη προς τον κατακόρυφο άξονα, η οποία τέμνει τον άξονα στο 25 άρα η διάμεσος είναι $\delta=25$.

β) i. Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό βλέπουμε ότι στις 2 πρώτες κλάσεις υπάρχει το 50% των παρατηρήσεων, συνεπώς στις 2 τελευταίες θα υπάρχει το υπόλοιπο 50% των παρατηρήσεων, δηλαδή το άθροισμα των συχνοτήτων στις 2 πρώτες κλάσεις θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα των συχνοτήτων στις 2 τελευταίες άρα: $\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$.

ii. Ο συμπληρωμένος πίνακας φαίνεται παρακάτω:



Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5,15)$	10	12	20	12	20
$[15,25)$	20	18	30	30	50
$[25,35)$	30	24	40	54	90
$[35,45)$	40	6	10	60	100
Σύνολο		$v=60$	100		

36971. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20 \cdot s \cdot x^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Αν ισχύει ότι $f'(1) = 0$, τότε:

β) Να δείξετε ότι το δείγμα των n παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $s = 1$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

δ) Για $s = 1$ και $\bar{x} = 20$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 40s \cdot x - 2\bar{x}$.

β) Είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 40s - 2\bar{x} = 0 \Leftrightarrow 2\bar{x} = 40s \Leftrightarrow 40s = 2\bar{x} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow CV = 0,05 = 5\% < 10\%$ άρα το δείγμα των n παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

γ) Είναι $2\bar{x} = 40 \Leftrightarrow \bar{x} = 20$.

δ) Είναι $f'(x) = 40x - 40$.

Επομένως $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 40x - 40 \geq 0 \Leftrightarrow 40x \geq 40 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = -17$.